高等学校教学参考书

数学分析的方法及例题选讲

（修订版）

徐利治　王兴华

高等教育出版社

数学分析的方法及例题选讲（修订版）　徐利治　王兴华　高等教育出版社

书号　13010·0887
定价　2.05　元

高等学校教学参考书

数学分析的方法及例题选讲

（修 订 版）

徐利治 王兴华

高等教育出版社

高等学校教学参考书
数学分析的方法
及例题选讲
（修订版）
徐利治　王兴华
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷三厂印装
*
开本 850×1168 1/32　印张 8.125　字数 196,000
1955年12月第1版　1983年5月第2版　1985年2月第2次印刷
印数 50,001—65,000
书号 13010·0887　　定价 2.05 元

前　言

经典数学分析中的思想方法和技巧是丰富多彩的．对每一个年青的数学工作者说来，及早掌握这些方法和技巧，将在一生的工作实践中受益无穷．正是从这个观点出发，本书前一编者早在1953—1954年就在东北人民大学（即吉林大学的前身）讲授了“分析方法”这门课程．1955年将讲稿整理出版，书名与本书同名．1958年该书曾由高等教育出版社重印一次．但两次印数总额只有7000余册，当即一销而空．二十多年来，该书早已不易找到了，只能偶而从一些数学著作的参考书目中发现该书的名字．

近些年来，曾不时收到各地读者来信建议再版该书．可是二十余年过去了，总感到原书的题材大有刷新一番的必要．只因苦于缺乏时间，致使修订工作拖迟三年之久．去年，本书后一编者在杭州大学数学系为高年级学生开设了“分析方法及例题选讲”这门课，用上述原书作教材，并在讲课过程中不断进行删改和补充．于是在这个基础上我们便合作从事原书的修订工作，修订后的书稿又在杭大讲授了一次，然后略经修改，终于最后定稿．

在这个修订本中，已经加入不少新颖的题材，更换了一些旧的例题和习题．新增的内容中，也有一部分命题是属于编者们自己的研究成果（例如关于插值余项的命题及振荡型积分的渐近展开式等）．

在内容题材的铺设上，本书尽可能对相互关联的命题、例题及习题作出适当编排，以便使读者容易产生联想，从中领悟预示的途径去解决问题．就这个特点而言，它与鲍利亚与薛戈的名著《数学分析的问题与定理》多少有些类似．事实上本书还借用了该书中

的一些有趣题材.

鲍利亚曾说过:“一位好的数学教师或学生应努力保持解题的好胃口.”我们自己也有这样的经验：要想较熟练地掌握数学分析的方法和技巧，最好的办法莫过于经常动手去解题. 因此在本书中，多半是示范性地给出典型命题与例题的极其简明扼要的证明或解法,类似的命题和习题则要求读者自己去解决. 应该承认,本书中的个别题目确实是难度较大的,一时作不出来，既不用灰心,也不必去查阅任何现成的习题解答书籍. 希望读者最好从一些相关联的题材中吸取经验和借鉴，能让自己去闯过难关，并从中享受乐趣!

这个修订本略去了原书的第五章（“各种类型的极限问题”),因为考虑到该章内容题材过份庞杂零乱,需要全面修改和增订,从而势必大大扩充篇幅. 因此，我们期望将来通过出版《续编》的方式来完成上述任务. 好在本书各章自成体系，且已足够表现出数学分析方法中的精采部分. 当然原书的一些特色都在这里保留下来了.

我们要感谢吉林大学和杭州大学的数学系给我们提供了完成这个修订本的工作条件. 还特别感谢审稿者路见可教授的细致审阅以及本书编辑的辛勤劳动. 这个修订本仓促问世，错误与缺点谅必难免,希望读者不吝指教.

徐利治　　王兴华
（吉林大学）（杭州大学）
1982年4月4日

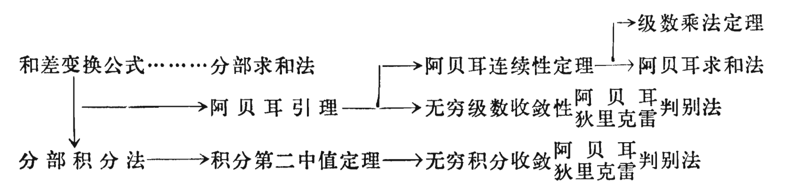
目　录

第一章　关于阿贝耳方法

阿贝耳(N. H. Abel, 1802—1829)的方法是一套比较古典的数学分析技巧. 它在数学分析的某些部分, 特别是在级数的收敛性理论及有关和式(或积分式)的阶的计算中常常用到.

在分析学中,因为理论系统性的关系,常常把这个方法分散到几处来讲. 在这里,由于我们无须受系统性要求的限制,并希望能将这套方法在应用上的特点表现得更显著一些, 因此就在这一章中,采用命题、例题和习题的形式,加以比较集中的考虑.

阿贝耳方法是从一个十分浅显的恒等式开始的. 这个恒等式可以叫做和差变换公式,又可以叫做分部求和公式,它相当于积分学中的分部积分法. 从这个简单的恒等式可以直接导出阿贝耳引理,从而又可导出一系列很有价值的命题. 简单地说,这就是下表所示的模式:



现在我们就把有关阿贝耳方法的若干命题, 例题和习题分布在下列各节中.

§1. 和差变换及其应用

1. (和差变换公式)设 $m<n$. 则

$$\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=A_nb_n-A_{m-1}b_m+\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1}).$$

［证］ 将等式左端的和拆开，然后对 A_k 进行同类项合并即得.

2.（分部求和法）设 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$. 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=s_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1}).$$

［证］ 这是于命题 1 取 $A_0=0$, $A_k=s_k(k\geqslant1)$的结果.

3. 设 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\to s(n\to\infty)$. 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=sb_1+(s_n-s)b_n-\sum_{k=1}^{n-1}(s_n-s)(b_{k+1}-b_k).$$

［证］ 这是于命题 1 取 $A_0=-s$, $A_k=s_k-s(k\geqslant1)$的结果.

4.（阿贝耳引理）若对一切 $n=1,2,3,\cdots$而言，

$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant0,$$

$$m\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant M.$$

则有

$$b_1m\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1M.$$

［证］应用命题 2，由于 $m\leqslant s_k\leqslant M$, $b_k-b_{k+1}\geqslant0$, 我们得到

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant Mb_n+\sum_{k=1}^{n-1}M(b_k-b_{k+1})=Mb_1,$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\geqslant mb_n+\sum_{k=1}^{n-1}m(b_k-b_{k+1})=mb_1.$$

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为任意实数或复数，又设

$$A=\max(|a_1|,|a_1+a_2|,\cdots,|a_1+a_2+\cdots+a_n|).$$

则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant A\left\{\sum_{k=1}^{n-1}|b_{k+1}-b_k|+|b_n|\right\}.$$

6. 设 $\varphi(n)>0$, $\varphi(n)\uparrow\infty(n\to\infty)$. 又设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(k) = o(\varphi(n)) \quad (n \to \infty). \quad \text{(Kronecker)}$$

［证］ 本题可用和差变换（命题3）来证. 设 $s=\Sigma a_n$, 并设 $1<m<n$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(k) = s\varphi(1) + (s_n - s)\varphi(n) - \sum_{k=1}^{n-1} (s_k - s)(\varphi(k+1) - \varphi(k))$$

$$= O(1) + o(\varphi(n)) - \sum_{k=1}^{m-1} (s_k - s)(\varphi(k+1) - \varphi(k)) - \sum_{k=m}^{n-1} (s_k - s)(\varphi(k+1) - \varphi(k)).$$

从而对任意固定的 m 而言, 有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(k) \right| \leqslant O(1) + o(\varphi(n)) - O(1) + \varepsilon_m \sum_{k=m}^{n-1} (\varphi(k+1) - \varphi(k)),$$

此处 $\varepsilon_m = \max\limits_{k \geqslant m} |s_k - s|$. 注意 $\varphi(n) \uparrow \infty$, 且 $\varepsilon_m \to 0 (m \to \infty)$, 因此对于任意预先给定的正数 ε, 总可以取 m 充分大, 使得

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(k) \right| \leqslant o(\varphi(n)) + \varepsilon_m \varphi(n) \leqslant o(\varphi(n)) + \varepsilon \varphi(n).$$

由于上式左端与 ε 并无关系, 自然可令 $\varepsilon \to 0$. 故命题得证.

7. 设 $\varphi(n) \downarrow 0 (n \to \infty)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(n)$ 为收敛. 则

$$\lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \varphi(n) = 0.$$

［证］ 显然在本命题中, 只要将 $a_n \varphi(n)$ 看作是命题 6 中的 a_n, 而把 $\varphi(n)^{-1}$ 看作是命题 6 中的 $\varphi(n)$, 就立刻得到

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k\varphi(k))\varphi(k)^{-1} = o(\varphi(n)^{-1}) \quad (n\to\infty).$$

［另证］ 本命题亦可利用阿贝耳引理直接证明. 任意给定 $\varepsilon>0$. 由收敛性假设, 可选取自然数 N, 使当 $n>N$ 时有

$$\frac{\varepsilon}{2}>a_N\varphi(N)+a_{N+1}\varphi(N+1)+\cdots+a_n\varphi(n)>-\frac{\varepsilon}{2}.$$

又显然

$$0<\varphi(N)^{-1}\leqslant\varphi(N+1)^{-1}\leqslant\cdots\leqslant\varphi(n)^{-1}.$$

故按命题 4 (视 $\varphi(n)^{-1}, \cdots, \varphi(N)^{-1}$ 为 $b_1, \cdots, b_n$), 便得到

$$\frac{\varepsilon}{2}\varphi(n)^{-1}>a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n>-\frac{\varepsilon}{2}\varphi(n)^{-1}.$$

亦即

$$|(a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n)\varphi(n)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而由于 $\varphi(n)\to 0$, 故又可取自然数 N', 使 $n>N'$ 时

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_{N-1})\varphi(n)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n>\max(N, N')$时

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_n)\varphi(n)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

命题证毕.

很明显, 命题 6 与命题 7 是可以相互推导的.

8. 设 $\sigma>0$. 则当下列的狄利克雷(G. L. Dirichlet, 1805—1859)级数

$$a_1\cdot 1^{-\sigma}+a_2\cdot 2^{-\sigma}+a_3\cdot 3^{-\sigma}+\cdots+a_n\cdot n^{-\sigma}+\cdots$$

收敛时, 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)n^{-\sigma}=0$.

9. 设 $\{z_n\}_1^\infty$ 为任意一个复数列而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_{n+1}^{-1}-z_n^{-1}|=\infty$. 又设

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ 为收敛．则必有

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N} |z_{n+1}^{-1}-z_n^{-1}|\right)^{-1}=0.$$

［提示］ 应用命题 5 并仿照命题 7 的后一证法即可证得本命题．

10. 设当 $k=1, 2, 3, \cdots$ 时 $b_k \geqslant b_{k+1}$，$\frac{1}{2}(b_k+b_{k+2}) \geqslant b_{k+1}$ 并且

$$m \leqslant s_1+s_2+\cdots+s_k \leqslant M.$$

其中 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$．则有下列不等式成立:

$$m(b_1-b_2)+s_n b_n < \sum_{k=1}^{n} a_k b_k < M(b_1-b_2)+s_n b_n.$$

［提示］ 对于 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ 应用分部求和法并利用题设不等式即可．

11. 设 N 为一固定的大整数，$a_1, a_2, \cdots, a_N, b_1, b_2, \cdots, b_N$ 为任意两组常数．今定义 $b_k=0(k>N)$ 以及

$$\Delta^m b_k=\Delta^{m-1} b_{k+1}-\Delta^{m-1} b_k,\ \Delta b_k=b_{k+1}-b_k,$$

$$s_k^{(m)}=\sum_{\nu=1}^{k} s_\nu^{(m-1)},\quad s_k^{(1)}=s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

则有下列恒等式成立:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k=(-1)^m \sum_{k=1}^{N} s_k^{(m)} \Delta^m b_k.$$

［提示］ 相继应用 m 次分部求和法即可．

12. 设 $a_k>0, b_k>0$，而 $\{v_k\}$ 为单调下降的正数列．又设

$$H=\max\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \cdots, \frac{B_n}{A_n}\right),\qquad h=\min\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \cdots, \frac{B_n}{A_n}\right),$$

$$H_m = \max\left(\frac{B_m}{A_m}, \frac{B_{m+1}}{A_{m+1}}, \cdots, \frac{B_n}{A_n}\right),$$

$$h_m = \min\left(\frac{B_m}{A_m}, \frac{B_{m+1}}{A_{m+1}}, \cdots, \frac{B_n}{A_n}\right),$$

此处 $A_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$, $B_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_k$. 则有下列不等式成立:

$$h_m + (h - h_m)\frac{\sum_{k=0}^{m} a_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k} \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}$$

$$\leqslant H_m + (H - H_m)\frac{\sum_{k=0}^{m} a_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}.$$

［证］ 本命题可看作阿贝耳引理的扩充. 其证明的办法亦大致相似. 首先我们注意到 $B_k \leqslant HA_k(k=0, 1, \cdots, n)$, $B_r \leqslant H_m A_r$ $(r=m, m+1, \cdots, n)$. 因此

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} b_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_k(v_k - v_{k+1}) + B_n v_n}{\sum_{k=0}^{n-1} A_k(v_k - v_{k+1}) + A_n v_n}$$

$$\leqslant \frac{\sum_{k=0}^{m-1} HA_k(v_k - v_{k+1}) + \sum_{k=m}^{n-1} H_m A_k(v_k - v_{k+1}) + H_m A_n v_n}{\sum_{k=0}^{n-1} A_k(v_k - v_{k+1}) + A_n v_n}$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} b_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k} - H_m \leqslant (H - H_m)\frac{\sum_{k=0}^{m-1} A_k(v_k - v_{k+1})}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}$$

$$\leqslant (H-H_m)\frac{\sum_{k=0}^{m} a_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}.$$

故命题中不等式的右段已告证明．其左段的证法与此相似．

13． 保留命题 12 的全部假设，但将$\{v_n\}$改设为单调上升的数列．则有

$$H_m-\frac{(H_m-h_m)A_n v_n+(H-H_m)A_m v_m}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}\leqslant\frac{\sum_{k=0}^{n} b_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}$$

$$\leqslant h_m+\frac{(H_m-h_m)A_n v_n+(h_m-h)A_m v_m}{\sum_{k=0}^{n} a_k v_k}.$$

§2．阿贝耳引理应用于级数收敛性问题

14．（阿贝耳定理）设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=s$．则 $\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=s$．

［证］ 容易看出$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=f(x)$在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上为一致收敛．事实上，对任给正数 ε，有N使当 $n>N$ 时 $\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right|<\varepsilon$．从而由阿贝耳引理（命题 4）可知同时有$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k\right|<x^n\varepsilon\leqslant\varepsilon$，只要$0\leqslant x\leqslant 1$．因此由函数项级数的连续性定理即得

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)=s.$$

15．（级数乘法定理）令 $c_n=a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\cdots+a_n b_0$．又设级数 Σa_n, Σb_n, Σc_n 都收敛．则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right). \qquad \text{(Abel)}$$

［证］ 因为绝对收敛的级数可以相乘，因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = s_1(x)s_2(x) \qquad (0 \leqslant x < 1).$$

于是由阿贝耳定理（命题 14）便立刻得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{x\to 1-} s_1(x)s_2(x) = \lim_{x\to 1-} s_1(x)\cdot \lim_{x\to 1-} s_2(x)$$

$$= s_1(1)s_2(1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

16. 试证

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots.$$

［证］ 于阿贝耳关于级数乘法的定理（命题 15）中，取 $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，$a_0 = b_0 = 0$，则有

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 = (-1)^n w_n,$$

此处

$$w_n = \frac{1}{1\cdot(n-1)} + \frac{1}{2\cdot(n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot 1} (n \geqslant 2).$$

显然

$$n w_n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}+1\right)$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right) = 2\ln n + 2\gamma + o(1) \quad (n\to\infty),$$

式中 γ 为欧拉（L. Euler, 1707—1783）常数（参见第四章题 25）。由是 $w_n \to 0$. 又因为 $(n+1)w_{n+1} - n w_n = \frac{2}{n}$，$n(w_n - w_{n+1}) =$

$w_{n+1}-[(n+1)w_{n+1}-nw_n]=w_{n+1}-\frac{2}{n}>0$，故知 $w_n\downarrow 0$. 从而由莱布尼兹（G. W. Leibniz, 1646—1716）收敛判别法可见级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n w_n$ 为收敛. 所以最后应用命题 15 即获证明.

17. 试证级数

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

的自乘级数为发散.

18. 设 $u_n\downarrow 0, v_n\downarrow 0$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}w_n$ 为收敛的充要条件是:

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1\to 0. \qquad \text{(Pringsheim)}$$

［证］ 条件的必要性是显然的. 今证充分性. 写

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k,\quad B_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}v_n,$$

$$C_n=\sum_{n=1}^{n}(-1)^{k-1}w_n,$$

并以 A, B 分别表 $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k$, $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}v_k$ 之和. 则

$$\begin{aligned}
C_n&=w_1-w_2+w_3-\cdots+(-1)^{n-1}w_n\\
&=u_1v_1-u_1v_2+u_1v_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_1v_n\\
&\qquad -u_2v_1+u_2v_2-\cdots+(-1)^{n-1}u_2v_{n-1}\\
&\qquad\qquad +u_3v_1-\cdots+(-1)^{n-1}u_3v_{n-2}\\
&\qquad\qquad\qquad -\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +(-1)^{n-1}u_nv_1\\
&=u_1B_n-u_2B_{n-1}+u_3B_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}u_nB_1.
\end{aligned}$$

从而

$$A_nB-C_n=u_1(B-B_n)-u_2(B-B_{n-1})+u_3(B-B_{n-2})-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}u_n(B-B_1).$$

据题设

$$|B-B_n|\leqslant v_{n+1},\ |B-B_{n-1}|\leqslant v_n,\ \cdots,\ |B-B_1|\leqslant v_2,$$

由是

$$|A_nB-C_n|\leqslant u_1v_{n+1}+u_2v_n+\cdots+u_nv_2$$
$$=w_{n+1}-u_{n+1}v_1\to 0(n\to\infty).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}A_nB=AB.$$

19. 设 $u_n\downarrow 0, v_n\downarrow 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积级数收敛的充要条件是 $U_nv_n\to 0$ 并且 $V_nu_n\to 0$, 这里

$U_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\ V_n=v_1+v_2+\cdots+v_n.$ (Pringsheim)

[证] 设 $U_nv_n\to 0, V_nu_n\to 0$. 则由 u_n 和 v_n 的单调性, 有

$$w_{2n}=u_1v_{2n}+u_2v_{2n-1}+\cdots+u_nv_{n+1}+u_{n+1}v_n+\cdots+u_{2n}v_1$$
$$\leqslant(u_1+\cdots+u_n)v_n+(v_1+\cdots+v_n)u_n=U_nv_n+V_nu_n,$$
$$w_{2n+1}\leqslant U_nv_n+V_nu_n+u_{n+1}v_{n+1}.$$

所以 $w_n\to 0$.

反之, 设 $w_n\to 0$, 则由

$$U_nv_n=(u_1+\cdots+u_n)v_n\leqslant u_1v_n+\cdots+u_nv_1=w_n,$$
$$V_nu_n\leqslant w_n$$

可知 $U_nv_n\to 0,\ V_nu_n\to 0$. 证毕.

20. 试讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}$ 的乘积级数的收敛性, 这里 $0<\alpha<1, 0<\beta<1$.

21. 设 Σa_n 和 Σb_n 二收敛级数中至少有一个绝对收敛, 又设

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. 则 Σc_n 必收敛，且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \qquad \text{(Mertens)}$$

［证］ 不妨设 Σa_n 为绝对收敛，且设

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to A, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \to B, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = A', \quad |B_n| \leqslant B'.$$

则如同命题 18 之证明，可得

$$A_n B - C_n = a_0(B - B_n) + a_1(B - B_{n-1}) + \cdots + a_n(B - B_0).$$

从而

$$|A_n B - C_n| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} |a_\nu|\,|B - B_{n-\nu}| + \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} |a_\nu|\,|B - B_{n-\nu}|$$

$$\leqslant A' \max_{\left[\frac{n}{2}\right] \leqslant k \leqslant n} |B - B_k| + 2B' \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} |a_\nu|.$$

可见 $A_n B - C_n \to 0$，即 $C_n \to AB$ $(n \to \infty)$.

22. （阿贝耳判别法）设级数 Σa_n 为收敛而 $\Sigma(b_n - b_{n+1})$ 为绝对收敛（其中 a_n, b_n 可以是复数），则 $\Sigma a_n b_n$ 必收敛.

［证］ 设 $\Sigma |b_n - b_{n+1}| = B$. 则 $|b_n| = \left|b_1 - \sum_{1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})\right| \leqslant |b_1| + B$. 于是由命题 5 的阿贝耳引理，得

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k b_k\right| \leqslant \left\{\max_{1 \leqslant p \leqslant n} \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k\right|\right\} \cdot$$

$$\left\{\sum_{k=m+1}^{m+n-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_{m+n}|\right\}$$

$$\leqslant (2B + |b_1|) \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k\right|.$$

由是可见 $\Sigma a_n b_n$ 必收敛.

23. (狄利克雷判别法) 设 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 为有界而 $\Sigma(b_n - b_{n+1})$ 为绝对收敛且 $b_n \to 0$(其中 a_n, b_n 可以是复数). 则 $\Sigma a_n b_n$ 必收敛.

[证] 在阿贝耳判别法的证明中,不等式

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k b_k\right| \leqslant \left\{\max_{1 \leqslant p \leqslant n}\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k\right|\right\} \cdot \left\{\sum_{k=m+1}^{m+n-1}|b_k - b_{k+1}| + |b_{m+n}|\right\}$$

右端的两个因子,前一个因子是 $o(1)$, 后一个因子是 $O(1)$. 而今则前一个因子是$O(1)$,后一个因子是 $o(1)$.

24. 设$\{b_n\}_1^\infty$ 为一有界单调实数列而级数 Σa_n 为收敛. 则级数 $\Sigma a_n b_n$ 必收敛. (Abel)

25. 设 $b_n \downarrow 0 (n \to \infty)$ 而 $\sum_1^n a_k$ 为有界. 则级数 $\Sigma a_n b_n$ 必收敛. (Dirichlet)

[提示] 命题 24 及 25 显然分别为命题 22 及 23 的特例.

26. 令 $t = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$. 则当 $0 < \theta < 2\pi$ 且 $a_n \downarrow 0$ 时级数 $\Sigma a_n t^n$ 为收敛,同时 $\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k t^k\right| \leqslant \frac{2a_n}{1-t}$.

[提示] 当 $|t| \leqslant 1$ 且 $t \neq 1$ 时

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} t^k\right| = \left|\frac{t^{n+1}(1-t^p)}{1-t}\right| \leqslant \frac{2}{|1-t|}.$$

于是利用命题 23 或 25 即得.

27. 设 $a_n \downarrow 0$. 则当 $0 < \theta < 2\pi$ 时级数 $\Sigma a_n \cos n\theta$ 及 $\Sigma a_n \sin n\theta$ 为收敛,且有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k \cos k\theta\right| \leqslant \frac{a_n}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \quad \text{及} \quad \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k \sin k\theta\right| \leqslant \frac{a_n}{\sin\dfrac{\theta}{2}}.$$

［提示］ 在命题 26 中考察级数的实部及虚部.

28. 试应用命题 25 来讨论级数 $\Sigma a_n u_n$, $\Sigma a_n v_n$ 的收敛性问题，其中$\sum_1^n u_k = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\theta$, $\sum_1^n v_k = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\theta$, 并从而推断

$$\Sigma a_n \sin n\theta \cdot \cos n^2\theta, \quad \Sigma a_n \sin n\theta \cdot \sin n^2\theta$$

二级数当 $a_n \downarrow 0$ 时都收敛. (Hardy)

29. 设 $a_n \downarrow 0 (n\to\infty)$ 且 $\frac{1}{2}(a_n + a_{n+2}) \geqslant a_{n+1}$. 则当 $0<\theta<2\pi$ 时级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$ 收敛于一个非负函数.

［证］ 写

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}},$$

$$K_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} D_k(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2.$$

则相继进行两次和差变换得

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) D_k(\theta) + a_n D_n(\theta)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}) K_k(\theta) + (a_{n-1} - a_n) k_{n-1}(\theta) + a_n D_n(\theta).$$

因为当 $\theta \in (0, 2\pi)$固定时 $K_n(\theta)$与 $D_n(\theta)$为有界，所以

$$(a_{n-1} - a_n) K_{n-1}(\theta) \to 0, \; a_n D_n(\theta) \to 0 \quad (n\to\infty).$$

由是

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\theta=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-2a_{n+1}+a_{n+2})K_n(\theta)\geqslant 0.$$

30. 若给定一个二重级数 $\Sigma a_{m,n}$，其部分和 $s_{m,n}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}$ 的绝对值恒小于某一常数 C．又设对一切正整数 m,n 而言，

$$b_{m,n}-b_{m+1,n}>0,\ b_{m,n}-b_{m,n+1}>0,$$

$$b_{m,n}-b_{m+1,n}-b_{m,n+1}+b_{m+1,n+1}>0,$$

并且 $b_{m,n}\to 0(m\to\infty)$，$b_{m,n}\to 0(n\to\infty)$．则二重级数 $\Sigma a_{m,n}b_{m,n}$ 必收敛． (Hardy)

［证］ 本命题实际上可看作是狄利克雷收敛性判别法的扩充．证明的主要步骤就在于设法把阿贝耳引理的证法推广到二重和的情形．设

$$H=\max_{\xi,\eta}\left|\sum_{\mu}^{\xi}\sum_{\nu}^{\eta}a_{m,n}\right| \quad (\mu\leqslant\xi\leqslant M,\ \nu\leqslant\eta\leqslant N).$$

于是仿照阿贝耳引理的证明，可得

$$(1)\qquad \left|\sum_{\mu}^{M}\sum_{\nu}^{N}a_{m,n}b_{m,n}\right|<Hb_{\mu,\nu}.$$

事实上，我们可以写出下列等式:

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{\mu}^{M}\sum_{\nu}^{N}a_{m,n}b_{m,n}\right|\\ =&\left|\sum_{\mu}^{M}\sum_{\nu}^{N}(h_{m,n}-h_{m-1,n}-h_{m,n-1}+h_{m-1,n-1})\,b_{m,n}\right|\\ =&\left|\sum_{\mu}^{M}\sum_{\nu}^{N}h_{m,n}(b_{m,n}-b^*_{m+1,n}-b^*_{m,n+1}+b^*_{m+1,n+1})\right|,\end{aligned}$$

其中 $h_{\xi,\eta}=\sum_{\mu}^{\xi}\sum_{\nu}^{\eta}a_{m,n}$，$b^*_{\xi,\eta}=b_{\xi,\eta}$（对 $\mu\leqslant\xi\leqslant M,\ \nu\leqslant\eta\leqslant N$），$h_{\xi,\eta}=0$，$b^*_{\xi,\eta}=0$（对其余的 ξ,η）．故最后以 H 代 $|h_{\xi,\eta}|$ 时就可看出不等式(1)的成立．

显然 $h_{\xi,\eta}=s_{\xi,\eta}-s_{\xi,\nu-1}-s_{\mu-1,\eta}+s_{\mu-1,\nu-1}$. 故可见当 μ 或 ν 等于 1 时, $H\leqslant 2C$, 而在一般情形下, $H\leqslant 4C$. 今

$$\sum_1^M\sum_1^N-\sum_1^{\mu-1}\sum_1^{\nu-1}=\sum_1^{\mu-1}\sum_\nu^N+\sum_\mu^M\sum_1^{\nu-1}+\sum_\mu^M\sum_\nu^N,$$

因此

$$\left|\left(\sum_1^M\sum_1^N-\sum_1^{\mu-1}\sum_1^{\nu-1}\right)a_{m,n}b_{m,n}\right|<2C(b_{1,\nu}+b_{\mu,1}+2b_{\mu,\nu})$$
$$<4C(b_{1,\nu}+b_{\mu,1}).$$

由于 $b_{1,\nu}\to 0(\nu\to\infty)$, $b_{\mu,1}\to 0(\mu\to\infty)$, 可见二重级数 $\Sigma a_{m,n}b_{m,n}$ 为收敛.

31. 设 $\alpha>0,\beta>0,p>0$. 试证二重级数

$$\sum_{m,\ n}\frac{\cos(m\theta+n\phi)}{(m\alpha+n\beta)^p}$$

为收敛.

[提示] 不难算出

$$|s_{m,n}|=\left|\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n\cos(k\theta+j\phi)\right|<4\left|\cos\frac{1}{2}\theta\cdot\cos\frac{1}{2}\phi\right|$$

以及

$$b_{m,n}-b_{m+1,n}=\int_m^{m+1}\frac{p\alpha dx}{(\alpha x+\beta n)^{p+1}}>0,$$

$$b_{m,n}-b_{m+1,n}-b_{m,n+1}+b_{m+1,n+1}$$
$$=\int_m^{m+1}dx\int_n^{n+1}\frac{p(p+1)\alpha\beta}{(\alpha x+\beta y)^{p+2}}dy>0,$$

其中 $b_{m,n}=(m\alpha+n\beta)^{-p}\to 0$(当 $m+n\to\infty$ 时).

§ 3. 阿贝耳的级数求和法

上节的命题 14, 通常称为阿贝耳的幂级数连续性定理. 由于

它表明函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=1$ 的左侧是连续的，因而可以用来帮助我们寻找收敛级数 Σa_n 的和．下面我们列举一些具体的例子．

32． 求证 (i) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2.$

(ii) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$

［证］ 当 $0\leqslant x<1$ 时

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x),\qquad \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\operatorname{tg}^{-1}x.$$

故得

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\to 1-}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim_{x\to 1-}\ln(1+x)=\ln 2.$$

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to 1-}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\lim_{x\to 1-}\operatorname{tg}^{-1}x=\frac{\pi}{4}.$$

33． 试求级数 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$ 的和．

［解］ 令 $f(x)=x-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{10}x^{10}+\cdots(|x|<1)$,

$f(0)=0$．今先求 $f(x)$ 的有限表达式．很明显地，我们有

$$f'(x)=1-x^3+x^6-+\cdots=\frac{1}{1+x^3}\quad(|x|<1),$$

从而

$$f(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(1-x+x^2)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

故最后应用命题 14 便立即得出

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=f(1-)$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

34. 求证$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{1}{n}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$

35. 设$a>-1, b>-1, a\neq b$. 求证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\frac{1}{b-a}\int_{0}^{1}\frac{x^{a}-x^{b}}{1-x}dx.$$

[证] 显然左端的级数是收敛的. 把它写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b}\right),$$

而作函数

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+a}}{n+a}-\frac{x^{n+b}}{n+b}\right)\quad(|x|<1).$$

从而

$$f'(x)=\frac{1}{b-a}\sum_{1}^{\infty}(x^{n+a-1}-x^{n+b-1})=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^{a}}{1-x}-\frac{x^{b}}{1-x}\right).$$

由于$f(0)=0$, 故

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{b-a}\left(\frac{t^{a}-t^{b}}{1-t}\right)dt\quad(0\leqslant x<1).$$

因此应用命题14即得所要证的等式.

36. 试证

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

[提示] 考虑$(1-x)^{-1/2}$的幂级数展开式.

37. 试证

$$\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}-\frac{4}{5\cdot 6}+\cdots=3\ln 2-2.$$

[提示] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\left(1+\frac{2}{x}\right)\ln(1+x)-2$

$(0<x<1)$.

38. 设当 n 增大时正值连续的函数列 $v_n(x)$ 为单调下降 $(0<x<1)$. 又设 $\lim\limits_{x\to1-}v_n(x)=1$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 则当 Σa_n 为收敛时有

$$\lim_{x\to1-}\sum_{0}^{\infty}a_nv_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.$$

[证] 本命题是阿贝耳关于幂级数和的连续性定理的拓广,其证法亦相似. 由于 $v_n(x)\to1(x\to1-)$,故不妨设 $v_n(1)=1$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 因此存在正数 A 及 δ 使对 $1-\delta\leqslant x\leqslant1$ 有 $v_0(x)<A$. 今设任意给定正数 ε,则可取正整数 N, 使对满足 $m\geqslant n>N$ 的一切正整数 m, n,皆有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|<\varepsilon.$$

由是,当 $n>N$ 时,对一切正整数 p 皆有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_kv_k(x)\right|\leqslant v_0(x)\max_{m\geqslant n}\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|<A\varepsilon\quad(1-\delta\leqslant x\leqslant1).$$

这说明 $\Sigma a_nv_n(x)$ 在$[1-\delta,1]$上为一致收敛. 因之, $\Sigma a_nv_n(x)$ 在 $x=1$ 的左侧是连续的.

39. 设级数 Σna_n 为收敛,又设 $f(x)=\Sigma a_nx^n(|x|<1)$. 则

$$\sum_{1}^{\infty}na_n=\lim_{x\to1-}(f(1)-f(x))/(1-x).\qquad\text{(Stolz)}$$

[提示] 注意 $\Sigma a_n=\Sigma(na_n)\frac{1}{n},\frac{1}{n}\downarrow0$,从而利用命题 25 可以从 Σna_n 的收敛性导出 Σa_n 的收敛性. 又因

$$v_n(x)=\frac{1-x^n}{n(1-x)}$$

当 $0<x<1$ 时关于 n 单调下降并且 $\lim\limits_{x\to 1-} v_n(x)=1(n=1,2,\cdots)$，故再应用命题 38 于 $\sum\limits_1^\infty n a_n v_n(x)$，便可得到我们所要证明的结果.

40. 试证

$$\lim_{x\to 1-}\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+x^n)}=\lim_{x\to 1-}\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{x^n(1-x)}{1-x^{2n}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2.$$

[提示] 可以应用命题 36. 例如我们置 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，$v_n=\frac{2x^n}{1+x^n}$，而求得第一个极限的两倍是 $\Sigma\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

41. 试证当$0<\theta<2\pi$时

$$\lim_{r\to 1-}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^\infty r^n\cos n\theta\right)=0,\ \lim_{r\to 1-}\sum_{n=1}^\infty r^n\sin n\theta=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

(Poisson)

[提示] 于级数$\frac{1}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^\infty t^n$ 中置 $t=re^{i\theta}$，然后考察其实部与虚部，即得当 $0<\theta<2\pi$，$0<r<1$ 时有

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^\infty r^n\cos n\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

$$\sum_{n=1}^\infty r^n\sin n\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

[注意] 在本命题中，级数$\frac{1}{2}+\Sigma\cos n\theta$ 与 $\Sigma\sin n\theta$ 是发散的. 但据“阿贝耳求和法”，居然亦能求得其“和”. 因此很自然地，我们就把这种“和”数叫做该发散级数的广义和. 显然，发散级数

的广义和与所用的求和法有关. 原则上说，任何一种求和法，若对所有收敛级数而言，据此法都能求得真正的和，则对某个发散级数依同法求得的“和”数就可以叫做广义和. 于是为了表示区别，说发散级数的广义和时要同时说出所用的求和法. 例如，命题 41 的结果可以说成：当 $0<\theta<2\pi$ 时，级数 $\frac{1}{2}+\sum\cos n\theta$ 按照阿贝耳-泊松求和法求得的广义和是 0，级数 $\sum\sin n\theta$ 按照阿贝耳-泊松求和法求得的广义和是$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$. 求和法同时冠以泊松(D. Poisson, 1781—1840)的姓氏是因为在使用该求和法时，泊松首先跨出由收敛级数到发散级数的一步.

§4. 分部积分法与积分中值定理

当下标 n 改成连续变量时，与和差变换相应的是分部积分公式，与阿贝耳引理相应的是鲍纳(O. Bonnet, 1819—1892)的积分中值定理. 在本节中，将叙述与此有关的若干命题、例题及习题. 为使某些命题能具有较一般的形式起见，我们将假定读者已经掌握关于黎曼-斯提捷(B. Riemann, 1826—1866; T. J. Stieltjes, 1856—1894)积分的初步知识. 对于不熟悉这些知识的读者，可借助于 $dg(x)=g'(x)dx$ 的理解，将命题自行改叙成自己熟悉的形式，并适当补足条件. 或者，略去有关部分不谈.

42. (分部积分法)设黎曼-斯提捷积分$\int_a^b \alpha(x)df(x)$存在，则$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$也存在，并且有分部积分公式

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=[f(x)\alpha(x)]_a^b-\int_a^b \alpha(x)df(x).$$

［证］ 以 π 表$[a,b]$的任一分划:

$$\pi: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

并记$|\pi|=\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}(x_\nu-x_{\nu-1})$. 应用和差变换（命题 1）于积分和

$\sigma(\pi,\ \xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$，其中计值点组 $\xi=(\xi_1,$ $\xi_2,\cdots,\xi_n)$适合 $x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k(k=1,2,\cdots,n)$，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma(\pi,\xi)=&-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha(x_k)[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)]+\alpha(x_n)f(\xi_n)\\&-\alpha(x_0)f(\xi_1)\\=&-\alpha(a)[f(\xi_1)-f(a)]-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha(x_k)[f(\xi_{k+1})\\&-f(\xi_k)]-\alpha(b)[f(b)-f(\xi_n)]+f(b)\alpha(b)\\&-f(a)\alpha(a)\\=&-\Sigma(\Pi,\Xi)+f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a),\end{aligned}$$

其中 Π 为分划 $a=\xi_0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<\xi_{n+1}=b$，而计值点组 $\Xi=(a,x_1,\cdots,x_{n-1},b)$，于是 $\Sigma(\Pi,\Xi)$ 为积分$\int_a^b\alpha(x)df(x)$ 的积分和，并且$|\Pi|=\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n+1}(\xi_\nu-\xi_{\nu-1})\leqslant 2|\pi|$. 所以令 $|\pi|\to 0$ 时便得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)d\alpha(x)=&\lim_{|\pi|\to 0}\sigma(\pi,\xi)=\lim_{|\Pi|\to 0}-\Sigma(\Pi,\Xi)\\&+f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)\\=&-\int_a^b\alpha(x)df(x)+f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a).\end{aligned}$$

［注意］ 熟知，若 $f(x)$连续而 $\alpha(x)$为一有界变差的函数，则积分$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$存在. 而由本命题可知，当 $\alpha(x)$为连续而 $f(x)$为有界变差时，积分$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$亦存在.

43. （第一中值定理）设 $\alpha(x)$为一单调函数而 $f(x)$为实值连续函数，则有中值公式

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(\xi)[\alpha(b)-\alpha(a)]\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

［提示］ 此命题的证法与通常黎曼积分的中值公式证法

相似.

44. 设 $f(x)$连续而 $\varphi(x)$为$[a, b]$上的勒贝格(H. Lebesgue, 1875—1941)可积函数(简写作 $\varphi\in L$) 并设 $\varphi(x)\geqslant 0$. 则必有 ξ, $a\leqslant\xi\leqslant b$, 使

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

[证] 在命题 43 中取 $\alpha(x)=\int_a^x \varphi(x)dx\,(a\leqslant x\leqslant b)$即得.

45. 设在$[a,b]$上 $f(x)$为连续而 $\alpha(x)$为有界变差, 则

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right|\leqslant M(f)\cdot\bigvee_a^b(\alpha),$$

这里 $M(f)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$, 而$\bigvee\limits_a^b(\alpha)$为$\alpha$ 在$[a,b]$上的全变差.

46. (第二中值定理)设在$[a, b]$上 $\alpha(x)$为一实值连续函数而 $f(x)$为一单调函数. 则必有 ξ, $a\leqslant\xi\leqslant b$, 使

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(a)\int_a^\xi d\alpha(x)+f(b)\int_\xi^b d\alpha(x).$$

[提示] 应用分部积分公式(命题 42)后再应用第一中值定理(命题 43)即得.

47. 设 $\varphi(x)\in L$, 又设 $f(x)$为单调. 则必存在 ξ, $a\leqslant\xi\leqslant b$, 使

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(a)\int_a^\xi \phi(x)dx+f(b)\int_\xi^b \phi(x)dx. \quad \text{(Bonnet)}$$

[证] 本命题可由命题 46 推出, 亦可直接利用阿贝耳引理(命题 4)来证明.

48. 设在$[a, b]$上 $\alpha(x)$为实值连续函数而 $f(x)\geqslant 0$ 且 $f(x)\uparrow$*, 则必有 ξ, $a\leqslant\xi\leqslant b$, 使

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(b)\int_\xi^b d\alpha(x).$$

---

* $f(x)\uparrow$表示 $f(x)$为单调增加函数, $f(x)\downarrow$表示 $f(x)$为单调减小函数.

又若 $f(x)\geqslant 0$ 且 $f(x)\downarrow$，则必有 $\xi, a\leqslant\xi\leqslant b$，使

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(a)\int_a^\xi d\alpha(x). \qquad \text{(Bonnet)}$$

［证］ 假定 $f(x)\downarrow$. 则应用阿贝耳引理于积分和

$$\sigma=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})],$$

易见

$$f(a)\inf_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x d\alpha(t)\leqslant\int_a^b f(x)d\alpha(x)\leqslant f(a)\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x d\alpha(t).$$

由于 $\int_a^x d\alpha(t)=\alpha(x)-\alpha(a)$ 为一连续函数，故必有 $x=\xi$ 之值使

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=f(a)[\alpha(\xi)-\alpha(a)].$$

至于 $f(x)\uparrow$ 的情形，其证法完全相似.

49. 试由命题 48 导出命题 46.

［解］ 假定命题 46 中的 $f(x)$ 为单调下降而不必为正. 则可令 $F(x)=f(x)-f(a)$. 于是以 $F(x)$ 代替命题 48 中 $f(x)$ 的地位即得.

50. 设在 $[a,b]$ 上 $\alpha(x)$ 为一有界变差函数而 $f(x)$ 为一非负的连续函数. 若 $f(x)\uparrow$，则

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=Af(b),$$

此处

$$\inf_{a\leqslant x\leqslant b}\int_x^b d\alpha(t)\leqslant A\leqslant\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\int_x^b d\alpha(t).$$

若 $f(x)\downarrow$，则

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=Bf(a).$$

此处

$$\inf_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x d\alpha(t)\leqslant B\leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x d\alpha(t). \qquad \text{(Boas)}$$

［提示］ 回顾命题 48 的证明过程，即可见本命题为真.

51. 设 $\alpha>0, A>0, 0\leqslant a<b$. 试证

$$\left|\int_a^b {\cos \atop \sin}\left(nt-\frac{A}{t^\alpha}\right)dt\right|<\frac{2}{n}. \qquad \text{(陈建功)}$$

［证］ 作变数替换

$$w=t-\frac{A}{nt^\alpha} \qquad (t>0).$$

则由此所确定的 $t=t(w)$ 及其微商均系单调函数. 事实上,

$$\frac{dt}{dw}=\left(1+\frac{A\alpha}{nt^{\alpha+1}}\right)^{-1}>0,$$

$$\frac{d^2t}{dw^2}=\left(1+\frac{A\alpha}{nt^{\alpha+1}}\right)^{-2}\frac{\alpha(\alpha+1)A}{nt^{\alpha+2}}\frac{dt}{dw}>0.$$

因此经变数替换后应用第二中值公式便得到

$$\left|\int_{w_a}^{w_b}{\cos \atop \sin}nw\cdot\frac{dt}{dw}dw\right|=\left|\left(1+\frac{\alpha A}{nb^{\alpha+1}}\right)^{-1}\int_\xi^{w_b}{\cos \atop \sin}nwdw\right|<\frac{2}{n},$$

此处 w_a, w_b 为相应于 $t=a, t=b$ 的 w 值, $w_a\leqslant\xi\leqslant w_b$.

52. 设 $f(x)$ 为以 2π 为周期的可积周期函数，那末采用命题 29 的证明中的记法时, $f(x)$ 的傅里叶级数的部分和可表成

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\theta)D_n(\theta)d\theta.$$

现设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上为连续的有界变差函数，试证 $S_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. (Dirichlet-Jordan)

［证］ 显然 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(\theta)d\theta=1$. 所以

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x+\theta)+f(x-\theta)-2f(x)]D_n(\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi_x(\theta)\frac{\sin n\theta}{\theta}d\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi_x(\theta)\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{\theta}\right)\sin n\theta d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(\theta)\cos n\theta d\theta,$$

式中 $\varphi_x(\theta)=f(x+\theta)+f(x-\theta)-2f(x)$. 根据黎曼-勒贝格引理，当 $n\to\infty$ 时，上式末端的后面两个积分都一致收敛于零. 至于前一个积分，则宜将积分区间拆成三段:

$$\int_0^{\pi}\varphi_x(\theta)\frac{\sin n\theta}{\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{n}}+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\eta}+\int_{\eta}^{\pi},\ \frac{\pi}{n}<\eta<\pi.$$

下面分别估计上式三个积分. 先看中间的一个. 由第二中值定理及分部积分法,

$$\left|\int_{\frac{\pi}{n}}^{\eta}\right|=\left|\frac{n}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\xi}\varphi_x(\theta)\sin n\theta d\theta\right|\quad\left(\frac{\pi}{n}<\xi<\eta\right)$$

$$=\left|\left[-\frac{\cos n\theta}{\pi}\varphi_x(\theta)\right]_{\theta=\frac{\pi}{n}}^{\theta=\xi}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\xi}\cos n\theta d\varphi_x(\theta)\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\max_{0\leqslant\theta\leqslant\eta}|\varphi_x(\theta)|+\frac{1}{\pi}\bigvee_0^{\eta}(\varphi_x(\cdot)).$$

对于正数 ε，我们可以取与 x 无关的 η，使上式的最右端小于 ε. 现在固定此 η. 令 $n>\frac{\pi}{\eta}$. 对第一个积分，由第一中值定理以及不等式 $|\sin n\theta|\leqslant n\theta$，得

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{n}}\right|\leqslant\max_{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{n}}|\varphi_x(\theta)|\left|\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin n\theta}{\theta}d\theta\leqslant\max_{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{n}}|\varphi_x(\theta)|\cdot\pi.\right.$$

所以存在与 x 无关的 N，使 $n>N$ 时 $\left|\int_0^{\frac{\pi}{n}}\right|<\varepsilon$. 显然，此 N 还可取得使当 $n>N$ 时对第三个积分亦有 $\left|\int_{\eta}^{\pi}\right|<\varepsilon$. 所以总结起来，当 $n>N$ 时有

$$\left|\int_0^{\pi}\varphi_x(\theta)\frac{\sin n\theta}{\theta}d\theta\right|<3\varepsilon.$$

证明完毕.

[注意] 由于 $S_n(x)\to S(x)$ 是函数 f 在 x 近旁的局部性质，所以当 $f(x)$ 为有界变差时，$S_n(x)$ 必收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

这个结果，通常叫做关于傅里叶(Ch. Fourier, 1768—1830)级数收敛性的狄里克雷-约当(C. Jordan, 1838—1922)判别法.

53. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 满足 $|F(x)|\leqslant M(x-a)\ (a\leqslant x\leqslant b)$. 又设 $g(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上非负并且非增的可积函数. 则

$$\left|\int_{a+}^b f(x)g(x)\,dx\right|\leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad \text{(Натансон)}$$

[证] 设 $a<\alpha<\beta\leqslant b$. 则由分部积分法，

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx-g(\beta)\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)[g(x)-g(\beta)]\,dx$$

$$=-F(\alpha)[g(\alpha)-g(\beta)]-\int_\alpha^\beta F(x)\,dg(x)$$

把关于 $|F(x)|$ 的条件用到上式的末端，可知其绝对值不超过

$$M(\alpha-a)[g(\alpha)-g(\beta)]-\int_\alpha^\beta M(x-a)\,dg(x)$$

$$=M(\alpha-a)[g(\alpha)-g(\beta)]-[M(x-a)g(x)]_\alpha^\beta+M\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

$$=M\int_\alpha^\beta g(x)\,dx+2M(\alpha-a)g(\alpha)-M(\alpha+\beta-2a)g(\beta).$$

当 $\alpha,\beta\to a+$ 时，这是个无穷小量，所以 $\int_{a+}^b f(x)g(x)\,dx$ 收敛. 置 $\beta=b,\alpha\to a+$，由上式得

$$\left|\int_{a+}^b f(x)g(x)\,dx\right|\leqslant M\int_a^b g(x)\,dx-M(b-a)g(b)$$

$$+g(b)\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

54. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的两个可积函数，$f(x)$ 不增，$g(x)$ 满足 $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. 则

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant \int_a^{a+\lambda} f(t)\,dt,$$

这里 $\lambda = \int_a^b g(t)\,dt$. (Steffensen)

［证］ 先证右段. 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\lambda} f(t)\,dt - \int_a^b f(t)g(t)\,dt \\
&= \int_a^{a+\lambda} [1-g(t)]f(t)\,dt - \int_{a+\lambda}^b f(t)g(t)\,dt \\
&\geqslant f(\alpha+\lambda)\int_a^{a+\lambda} [1-g(t)]\,dt - \int_{a+\lambda}^b f(t)g(t)\,dt \\
&= \int_{a+\lambda}^b [f(a+\lambda)-f(t)]g(t)\,dt \geqslant 0.
\end{aligned}$$

左段可以同样证明. 但也可由已证的右段导出. 事实上，置 $G(t) = 1-g(t)$，则只要对 $\int_a^b f(t)G(t)\,dt$ 应用右段即可.

55. 设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 满足

$$\int_a^x g_1(t)\,dt \leqslant \int_a^x g_2(t)\,dt \quad (a \leqslant x < b),$$

$$\int_a^b g_1(t)\,dt = \int_a^b g_2(t)\,dt.$$

又设 $f(x)$ 为非增. 则

$$\int_a^b f(x)g_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g_2(x)\,dx. \qquad \text{(Steffensen)}$$

［证］ 置 $G(t) = \int_a^x [g_2(t)-g_1(t)]\,dt$. 则 $G(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. $G(a) = G(b) = 0$. 所以

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(t)g_2(t)\,dt - \int_a^b f(t)g_1(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dG(t) \\
&= [f(t)G(t)]_a^b - \int_a^b G(t)\,df(t) = -\int_a^b G(t)\,df(t) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

56. 试由命题55推出命题54.

［提示］ 置 $g_1(t)=\begin{cases}1(b-\lambda\leqslant x\leqslant b),\\0(a\leqslant x<b-\lambda);\end{cases}$ $g_2(t)=g(t)$;

$g_3(t)=\begin{cases}1(a\leqslant x\leqslant a+\lambda),\\0(a+\lambda<x\leqslant b).\end{cases}$

57. 以 $0\leqslant g(t)\leqslant A$ 代替命题54中的 $0\leqslant g(t)\leqslant 1$，则有

$$A\int_{b-\lambda}^{b}f(t)\,dt\leqslant\int_a^b f(t)g(t)\,dt\leqslant A\int_a^{a+\lambda}f(t)\,dt,$$

这里 A 是正的常数，$\lambda=\frac{1}{A}\int_a^b g(t)\,dt$. (Hayashi)

［提示］ 我们有

$$A\int_a^{a+\lambda}f(t)\,dt-\int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

$$=\int_a^{a+\lambda}[f(t)-f(a+\lambda)][A-g(t)]\,dt+\int_{a+\lambda}^{b}[f(a+\lambda)-f(t)]g(t)\,dt,$$

等等.

58. 不等式

$$\int_{b-\lambda}^{b}f(t)\,dt\leqslant\int_a^b f(t)g(t)\,dt\leqslant\int_a^{a+\lambda}f(t)\,dt \tag{1}$$

(式中 $\lambda=\int_a^b g(t)\,dt$) 对每个不增的函数 $f(t)$ 都成立的充分且必要条件是函数 $g(t)$ 对所有 $x\in[a,b]$ 满足

$$0\leqslant\int_x^b g(t)\,dt\leqslant b-x \text{ 且 } 0\leqslant\int_a^x g(t)\,dt\leqslant x-a. \tag{2}$$

(Vasić-Peĉarić)

［证］ 先证条件的必要性. 置 $f(t)=\begin{cases}1(t\leqslant x),\\0(t>x).\end{cases}$ 则不等式 (1) 给出

$$\int_a^x g(t)\,dt\leqslant x-a \qquad (a\leqslant x\leqslant a+\lambda), \tag{3}$$

$$\int_x^b g(t)\,dt \geqslant 0 \qquad (a+\lambda \leqslant x \leqslant b). \tag{4}$$

设 $a+\lambda\leqslant x\leqslant b$, 则由(4),

$$(x-a)-\int_a^x g(t)\,dt=(x-a-\lambda)+\int_x^b g(t)\,dt\geqslant 0.$$

设 $a\leqslant x\leqslant a+\lambda$, 则由(3),

$$\int_x^b g(t)\,dt=\lambda-\int_a^x g(t)\,dt\geqslant\lambda-(x-a)=a+\lambda-x\geqslant 0.$$

所以(3)和(4)对所有 $x\in[a,b]$都成立. 同样可证

$$\int_a^x g(t)\,dt\geqslant 0,\ \int_x^b g(t)\,dt\leqslant b-x$$

对所有 $x\in[a,b]$成立. 所以当不等式(1)对所有不增的 $f(t)$成立时条件(2)成立.

再证条件的充分性. 我们有

$$\begin{aligned}&\int_a^{a+\lambda} f(t)\,dt-\int_a^b f(t)g(t)\,dt\\&=\int_a^{a+\lambda}[f(t)-f(a+\lambda)][1-g(t)]\,dt\\&\quad+\int_{a+\lambda}^b[f(a+\lambda)-f(t)]g(t)\,dt=I_1+I_2.\end{aligned}$$

利用分部积分公式

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=f(b)\int_a^b\varphi(t)\,dt-\int_a^b\left(\int_a^x\varphi(t)\,dt\right)df(x),$$

易知当(2)成立时

$$\begin{aligned}I_1&=-\int_a^{a+\lambda}\left[\int_a^x(1-g(t))\,dt\right]df(x)\\&=\int_a^{a+\lambda}\left[(x-a)-\int_a^x g(t)\,dt\right]d[-f(t)]\geqslant 0,\\I_2&=-\int_{a+\lambda}^b\left[\int_x^b g(t)\,dt\right]df(x)\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以(1)右边的不等式成立. 左边的不等式也可以同样地证明.

59. 设无穷积分$\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$为收敛．又设$\psi(x)$为一单调的有界函数．则积分$\int_a^{\infty}\varphi(x)\psi(x)dx$亦必收敛． (Abel)

［提示］ 显然本命题相当于命题 24 (关于无穷级数的阿贝耳判别法)．不难利用命题 47 来证明．

60. 设函数$\alpha(x)=\int_a^x\varphi(t)\,dt$为有界$(a\leqslant x<\infty)$．又设当$x\to\infty$时$\psi(x)\downarrow 0$．则积分$\int_a^{\infty}\varphi(x)\psi(x)dx$必收敛． (Dirichlet)

［提示］ 本命题显然与命题 25 相当．

61. 设$\varphi(x)\downarrow 0(x\to\infty)$．试证下列二积分必收敛:

$$\int_a^{\infty}\varphi(x)\sin x\,dx,\quad \int_a^{\infty}\varphi(x)\cos x\,dx.$$

62. 设a是正的常数．试证不等式

$$\left|\int_a^{\infty}\cos(x^2)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{a}.$$

［证］ 利用命题 48 易知

$$\left|\int_a^{\infty}\cos(x^2)\,dx\right|=\left|\int_{a^2}^{\infty}\frac{\cos u}{2\sqrt{n}}du\right|\leqslant\frac{1}{2a}\sup_{a^2\leqslant u<\infty}\left|\int_{a^2}^{u}\cos t\,dt\right|\leqslant\frac{1}{a}.$$

63. 设$f(x)\geqslant 0, f(x)\downarrow(0\leqslant x<\infty)$．又设$g(x)$满足$0\leqslant g(x)\leqslant A(0\leqslant x<\infty)$．若记$\lambda=\frac{1}{A}\int_0^{\infty}g(t)\,dt$．则

$$\int_0^{\infty}f(x)g(x)dx\leqslant A\int_0^{\lambda}f(x)dx. \qquad \text{(Apéry)}$$

［提示］ 由阿贝耳判别法可知积分$\int_0^{\infty}f(x)g(x)dx$为收敛．此外我们可以写出与命题 57 的提示中的等式相仿的等式．

64. 试建立与命题 22、23 相当的关于积分$\int_a^{\infty}\varphi(x)\psi(x)dx$的收敛判别法．

［提示］ 若 $\lim\limits_{b\to\infty}\bigvee\limits_a^b(\psi)=\bigvee\limits_a^\infty(\psi)$为有限，则说 $\psi(x)$在区间 $[a,\infty)$上为有界变差. 于是有

阿贝耳判别法. 设 $\psi(x)$在$(a,\ \infty)$上为有界变差，且积分 $\int_a^\infty\varphi(x)dx$ 为收敛. 则积分$\int_a^\infty\varphi(x)\psi(x)dx$ 亦收敛.

狄利克雷判别法. 设$\int_a^x\varphi(t)dt\ (a\leqslant x<\infty)$为有界. 若 $\psi(x)$ 在(a,∞)上为有界变差且 $\psi(x)\to 0\ (x\to\infty)$, 则积分$\int_a^\infty\varphi(x)\psi(x)dx$ 为收敛.

事实上, 对任意 $\beta>\alpha>a$, 我们有

$$\left|\int_\alpha^\beta\varphi(x)\psi(x)dx\right|\leqslant\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}\left|\int_\alpha^x\varphi(t)dt\right|\cdot\left\{\bigvee_\alpha^\beta(\psi)+|\psi(\beta)|\right\}.$$

当 $\alpha\to\infty$时, 上式右端或者$=o(1)\cdot O(1)$, 或者$=O(1)\cdot o(1)$.

65. 设 $\varphi(t), \psi(t),\ \alpha(t)$都是在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的有界变差函数而且彼此没有相同的不连续点. 则有

$$\left|\int_a^b\varphi(t)\psi(t)d\alpha(t)\right|$$

$$\leqslant\left(\bigvee_{a+}^{b-}(\varphi)+|\varphi(b-)|\right)\cdot\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^x\psi(t)d\alpha(t)\right|,$$

$$\left|\int_a^b\varphi(t)\psi(t)d\alpha(t)\right|$$

$$\leqslant\left(\bigvee_{a+}^{b-}(\varphi)+|\varphi(a+)|\right)\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_x^b\psi(t)d\alpha(t)\right|.$$

［证］ 命题中两个不等式的证法基本上是一样的. 现在来证明其中的第一个. 令$\{\pi_m\}_1^\infty$ 为$[a,b]$的分划序列, 即

$$\pi_m\colon a=x_0^{(m)}<x_1^{(m)}<\cdots<x_{n_m}^{(m)}=b,$$

$$|\pi_m|=\max_{1\leqslant i\leqslant n_m}|x_i^{(m)}-x_{i-1}^{(m)}|\quad(m=1,2,\cdots).$$

并且规定，π_m 的全部分点亦都是 π_{m+1} 的分点，且 $|\pi_m|\to 0(m\to\infty)$．应用一般形式的阿贝耳引理(命题 5)，可得

$$\left|\sum_{i=1}^{n_m}\varphi(\bar{x}_i^{(m)})\psi(\bar{x}_i^{(m)})[\alpha(x_i^{(m)})-\alpha(x_{i-1}^{(m)})]\right| \tag{1}$$

$$\leqslant M(\pi_m)\left\{\sum_{i=1}^{n_m-1}|\varphi(\bar{x}_{i+1}^{(m)})-\varphi(\bar{x}_i^{(m)})|+|\varphi(\bar{x}_{n_m}^{(m)})|\right\}$$

$$\leqslant M(\pi_m)\left[\bigvee_{a+}^{b-}(\varphi)+|\varphi(b-)|\right],$$

此处 $\bar{x}_i^{(m)}=\frac{1}{2}(x_{i-1}^{(m)}+x_i^{(m)})(i=1,2,\cdots,n_m)$，$\bigvee_{a+}^{b-}(\varphi)$ 表 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上的总变差，又

$$M(\pi_m)=\max_{1\leqslant p\leqslant n_m}\left|\sum_{i=1}^{p}\psi(\bar{x}_i^{(m)})[\alpha(x_i^{(m)})-\alpha(x_{i-1}^{(m)})]\right|.$$

由黎曼-斯提捷积分的存在性，可知当 $m\to\infty$ 时(1)的左端趋于 $\left|\int_a^b\varphi(x)\psi(x)d\alpha(x)\right|$．因此问题即在于证明

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}M(\pi_m)=L\leqslant\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^x\psi(u)d\alpha(u)\right|. \tag{2}$$

显然我们可以从 $\{\pi_m\}$ 中选取一个子叙列 $\{\pi'_l\}$，使得 $M(\pi'_l)\to L(l\to\infty)$．今假定

$$M(\pi'_l)=\left|\sum_{i=1}^{p_l}\psi(\bar{x}_i^{(l)})[\alpha(x_i^{(l)})-\alpha(x_{i-1}^{(l)})]\right|\quad(l=1,2,\cdots). \tag{3}$$

则 $\{x_{p_l}^{(l)}\}$ 显然为一有界点列，故有上极限 $\overline{\lim}\,x_{p_l}^{(l)}=\lambda\leqslant b$．于是有两种情形应别加以考虑:

(i) 假定有无限多个 l 的值，例如 $\{l_k\}$ 使 $x_{p_{l_k}}^{(l_k)}=\lambda(k=1,2,\cdots)$．此时即可从 $\{\pi'_l\}$ 中选择子序列 $\{\pi'_{l_k}\}$ 而由黎曼-斯提捷积分的存在性可知

$$\lim_{k\to\infty} M(\pi'_{l_k}) = L = \left|\int_a^{\lambda} \psi(u)\,d\alpha(u)\right|. \tag{4}$$

(ii) 假定并没有无限多个 l 的值使 $x_{p_l}^{(l)}=\lambda$. 此时可从$\{\pi'_l\}$中选取如此的子序列$\{\pi'_{l_k}\}$使 $x_{p_{l_k}}^{(l_k)}\uparrow\lambda(k\to\infty)$. 从而可知

$$\lim_{k\to\infty} M(\pi'_{l_k}) = L = \left|\int_a^{\lambda-} \psi(u)\,d\alpha(u)\right|. \tag{5}$$

最后由(3),(4),(5)三式可知(2)为真. 故命题得证.

66. 设 $\varphi(t),\psi(t),\alpha(t)$都是在 $a'\leqslant t\leqslant b$ 上的有界变差函数而且无相同的不连续点. 又设 c 是 a,b 之间的任意一个值. 则有下列不等式成立, 其中积分号下被省写的被积表达式是 $\psi(t)d\alpha(t)$:

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,d\alpha(t)\right| \leqslant \overset{c}{\underset{a+}{\mathrm{V}}}[\varphi]\sup_{a\leqslant x\leqslant c}\left|\int_a^x\right| + \left(\overset{b-}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(\varphi)+\varphi(b-)\right)\sup_{c\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^x\right|,$$

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,d\alpha(t)\right| \leqslant \left(\overset{c}{\underset{a+}{\mathrm{V}}}(\varphi)+\varphi(a+)\right)\sup_{a\leqslant x\leqslant c}\left|\int_x^b\right| + \overset{b-}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(\varphi)\sup_{c\leqslant x\leqslant b}\left|\int_x^b\right|.$$

[提示] 显然,本命题可以看作是命题 65 的一个精确化. 要证明它, 我们只须在命题 65 证明中的分划序列$\{\pi_m\}$的分点内插进一个固定的分点 $x=c$(此点属于一切 π_m). 再取 $\bar{x}_i^{(m)}=x_i^{(m)}(i=2,3,\cdots,n_m-1)$, $\bar{x}_1^{(m)}=\frac{1}{2}(x_0^{(m)}+x_1^{(m)})$, $\bar{x}_{n_m}=\frac{1}{2}(x_{n_m-1}^{(m)}+x_{n_m}^{(m)})$. 于是不等式(1)的右端可依 c 为分界点裂成两段而分别考虑其极限, 仿命题 65 的证法即可得证.

67. 设函数 $\alpha(x),\varphi(x)\neq 0$定义在$[0,\infty)$上而适合下列条件:

(i) 在每一有限区间$[0,t]$上 $\alpha(x)$, $\varphi(x)$都是有界变差函数;

(ii) $\alpha(x)$及 $\varphi(x)$没有相同的不连续点;

(iii) 当 $t\to\infty$ 时, $\overset{t}{\underset{0}{V}}(\varphi)\to\infty$;

则无穷积分$\int_0^\infty \varphi(t)^{-1}d\alpha(t)$收敛的必要条件是

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)\Big/\overset{t}{\underset{0}{V}}(\phi)=0.$$

[证] 可应用命题 65 来证. 设命题中的无穷积分为收敛. 则对 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使当 $T'>T>N$ 时皆有

$$\left|\int_T^{T'}\frac{d\alpha(t)}{\varphi(t)}\right|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

由是应用命题 65 的第二个不等式可以见到

$$|\alpha(T')-\alpha(T)|=\left|\int_T^{T'}d\alpha(t)\right|=\left|\int_T^{T'}\varphi(t)\frac{d\alpha(t)}{\varphi(t)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\overset{T'}{\underset{T}{V}}(\varphi)+|\varphi(T+)|\right)\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $\overset{T'}{\underset{T}{V}}(\varphi)\to\infty(T'\to\infty)$, 故可取 T' 充分大使得

$$|\alpha(T')|<\overset{T'}{\underset{0}{V}}(\varphi)\varepsilon, \text{亦即} |\alpha(T')\Big/\overset{T'}{\underset{0}{V}}(\varphi)|<\varepsilon.$$

是故命题为真.

68. 试证在命题 67 的条件下有可能 $\alpha(t)\to\infty(t\to\infty)$而同时 $\varphi(t)$为有界函数.

[证] 令

$$\alpha(t)=\begin{cases}0(0\leqslant t<1),\\ \ln t(1\leqslant t<\infty).\end{cases}$$

$$\varphi(t)=(-1)^k\quad(k\leqslant t<k+1, k=0,1,2,\cdots).$$

则不难看出命题 67 的全部条件皆满足. 并且, 积分$\int_0^\infty\varphi(t)^{-1}d\alpha(t)$

是收敛的．事实上，对于小的正数 δ 而言，由分部积分法可得

$$\int_{k-\delta}^{k+\delta}\frac{d\alpha(t)}{\varphi(t)}=(-1)^k\{\ln(k+\delta)+\ln(k-\delta)-2\ln k\}$$

$$(k=1,2,3,\cdots).$$

因此 $\int_{k-0}^{k+0}\varphi(t)^{-1}d\alpha(t)=0$．从而

$$\int_0^\infty\frac{d\alpha(t)}{\varphi(t)}=\int_{1+}^\infty\frac{d\alpha(t)}{\phi(t)}=\sum_{k=1}^\infty\int_{k+}^{1+k-}\frac{d\alpha(t)}{\varphi(t)}=\sum_{k=1}^\infty(-1)^k\int_{k+}^{1+k-}\frac{dt}{t}$$

$$=-\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{4}{3}+\cdots,$$

此为收敛．尽管如此，但却有 $\alpha(t)\to\infty(t\to\infty)$．

69．设 x 为一固定值，$\alpha(t)$为一单调的连续函数．试证当下列积分

$$f(x)=\int_{x+1}^\infty\frac{\ln(x/t)}{x-t}d\alpha(t)$$

收敛时必有 $\alpha(t)=o(t/\ln t)(t\to\infty)$

70．设 $\beta(t)$及 $\phi(t)$在每一有限区间$[0,\ T]$上都是有界变差函数，且当 $t\to\infty$ 时 $\beta(t)\to B$，$\phi(t)\to\pm\infty$．又设 $\beta(t)$在$[0,\infty)$上连续并且对一切 $T>0$ 而言有条件 $\bigvee\limits_0^T(\phi)/|\phi(T)|<K$ （K 为常数）成立．则有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\phi(T)}\int_0^T\beta(t)d\phi(t)=\beta(\infty)=B.$$

［证］ 不妨假定 $\phi(t)\neq0(0\leqslant t<\infty)$．因若不然，则由于 $\phi(t)\to+\infty$或 $\phi(t)\to-\infty$，显然可于 $\phi(t)$加上一个绝对值大的常数迫使恒不为零．现设

$$\alpha(t)=\int_0^t\phi(u)d\beta(u)\quad(\alpha(0)=0).$$

显然 $\alpha(t)$是一个有界变差的连续函数．此外，我们有

$$\beta(t)=\int_0^t \phi(u)^{-1}d\alpha(u)+\beta(0). \tag{1}$$

事实上,由分部积分法并调换积分次序,得到

$$\int_0^t \phi(u)^{-1}d\alpha(u)=\phi(t)^{-1}\alpha(t)-\int_0^t \alpha(u)d\phi(u)^{-1}$$

$$=\phi(t)^{-1}\alpha(t)-\int_0^t d\phi(u)^{-1}\int_0^u \phi(x)d\beta(x)$$

$$=\phi(t)^{-1}\alpha(t)-\int_0^t \phi(x)d\beta(x)\int_x^t d\phi(u)^{-1}$$

$$=\phi(t)^{-1}\alpha(t)-\int_0^t [\phi(t)^{-1}-\phi(x)^{-1}]\phi(x)d\beta(x)$$

$$=\beta(t)-\beta(0).$$

由假设 $\beta(t)\to\beta(\infty)=B$. 故由(1)又得

$$\int_0^\infty \phi(u)^{-1}d\alpha(u)=\beta(\infty)-\beta(0). \tag{2}$$

再对(1)的右端实行分部积分,且以 $\phi(t)^{-1}$ 乘两端,得

$$\frac{\alpha(t)}{\phi(t)}=\beta(t)-\frac{\phi(0)}{\phi(t)}\beta(0)-\frac{1}{\phi(t)}\int_0^t \beta(u)d\phi(u). \tag{3}$$

根据命题 67 由(2)可知 $\alpha(t)\Big/\overset{t}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(\phi)\to 0$. 从而由本命题的假设 $\overset{t}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(\phi)=o(|\phi(t)|)$ 得到 $\alpha(t)/\phi(t)\to 0$. 因此于式(3)的两端令 $t\to\infty$ 就得出所要证明的结果.

71. 设 $a_n\to a(n\to\infty)$, $\Sigma b_n=\infty$(b_n 不必全正). 又设对一切 n 而言有 $(|b_0|+|b_1|+\cdots+|b_n|)/|b_0+b_1+\cdots+b_n|<K$ (常数). 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n}=a. \qquad \text{(Jensen)}$$

[提示] 只要在命题 70 中将 $\phi(t)$ 定义成适当的阶梯函数即可.

72. 试作一例表明命题 71 中的条件$\sum_0^n|b_k|\Big/\Big|\sum_0^n b_k\Big|<K$不可缺少，并且由是推断命题 70 中的条件$\bigvee_0^t(\phi)/|\phi(t)|<K$亦系必要.

73. 设函数 $\alpha(x)$，$\phi(x)\neq 0$ 适合命题 67 的条件(i)及(ii)，则下列(I)，(II)，(III)三组中的每一组都是积分$\int_0^\infty \phi(t)^{-1}d\alpha(t)$收敛的充分条件:

(I) $\alpha(\infty)$存在，且$\bigvee_0^\infty(\phi^{-1})<\infty$.

(II) $\alpha(x)=o(1)$，$|\phi(x)|\to\infty$，$\bigvee_x^\infty(\phi^{-1})\to 0\quad(x\to\infty)$.

(III) $|\phi(x)|\to\infty$，对充分大的 x，$\phi(x)$可微，且有 $p>1$ 使

$$\alpha(x)=o(|\phi(x)|),\ \alpha(x)=o\left(\frac{\phi(x)}{|\phi'(x)|x(\ln x)^p}\right)\qquad(x\to\infty).$$

［证］ 由命题 65 可看出

$$\left|\int_T^{T'}\frac{d\alpha(t)}{\phi(t)}\right|\leqslant\left(\bigvee_T^{T'}(\phi^{-1})+|\phi(T)^{-1}|\right)\sup_{T\leqslant x\leqslant T'}|\alpha(x)-\alpha(T')|.$$

以此与命题 64 的提示中的不等式相对照，可见条件(I)或(II)之为充分即与其中的阿贝耳判别法或狄里克雷判别法相当.

又根据命题 67 可知(III)中的条件 $\alpha(x)=o(|\phi|)$ 实为必要；再由(III)中的另一条件之成立我们还看出

$$\lim_{T\to\infty}\int_N^T\frac{d\alpha(t)}{\phi(t)}=-\frac{\alpha(N)}{\phi(N)}+\int_N^\infty\frac{\phi'(t)}{\phi(t)^2}\alpha(t)\,dt,$$

此处右端的积分当然是收敛的. 因此(III)的充分性便一目了然.

74. 试观察命题 9 可由命题 67 推演出来.

75. 设在每一有限区间$[0,\ t]$上$\phi(u)$为有界变差函数，$\beta(u)$为有界变差的连续函数．又设对一切$u\geqslant 0$而言，$\phi(u)\neq 0$．则有下列互倒关系成立*)：

$$\alpha(t)=\int_0^t \phi(u)d\beta(u)\Longleftrightarrow\beta(t)-\beta(0)=\int_0^t \phi(u)^{-1}d\alpha(u).$$

［提示］ 从左到右的推导关系已经出现在命题70的证明中．至于从右到左的推导，其证明方式完全相似．在证明过程中需要指明一点，即$\alpha(t)$亦为有界变差函数．

关于第一章的注释

注1． 在命题1和2中，和差变换公式及分部求和法实是一回事．它们的意思是说两个因子乘积的有限和$\Sigma a_k b_k$，可以通过先对一个因子a_k的求和部分地求出，而另一部分也表现为两个因子乘积的有限和$\Sigma s_k(b_k-b_{k+1})$，其一个因子即是先被求和因子a_k的不定和(不定和分)s_k，另一个因子是未被求和因子b_k的差(负差分)$-\Delta b_k=b_k-b_{k+1}$．因而这个方法或公式的主要作用便在于：使得我们能够利用序列$\{s_k\}$和$\{\Delta b_k\}$的性质来估量或判断关于序列$\{a_k\}$和$\{b_k\}$的量$f(n)=\sum\limits_1^n a_k b_k$的存在范围与性质．例如阿贝耳引理(命题4,5)，克罗内克(L. Kronecker, 1823—1891)的命题(命题6, 7)乃至阿贝耳及狄利克雷关于级数收敛的判别法则(命题22—25)等等，都无不是根据这样的事实得来的．

注2． 阿贝耳引理(命题4)具有这样的意义：它只利用单调下降序列(b)的起始一数与(a)之部分和序列$\{s_k\}$的上下界，便能制约着$f(n)=\sum\limits_1^n a_k b_k$的变动范围．在这里，$(a)$当然不必是正数的

*) 下式中，记号“$\Longleftrightarrow$”表示逻辑等价，本书还采用记号“$\Longrightarrow$”表示蕴含．

序列，而且制约范围也并不与各个 a 本身有关，而是与 a 的集体 s_k 存在的范围有关．利用这一个基本事实，我们就能够顺利地建立阿贝耳的连续性定理（命题 14）以及若干有较大适用范围的收敛性判别法则（命题 24，25）．

注 3．阿贝耳的级数乘法定理和墨吞斯（F. Mertens，1840—1927）的定理（命题 15，21）在最后的结论形式上固然是一样的，但在它们的假设条件中却是互有出入的．仔细说来，墨吞斯定理适用的范围要比阿贝耳乘法定理的范围来得小．例如就第 16 题的结论来说，它是阿贝耳乘法定理的一个结果，但其条件却不满足墨吞斯定理的假设要求．而反过来，墨吞斯定理本身就说明，它或显或隐地包括了阿贝耳乘法定理的全部条件．

注 4．在应用阿贝耳定理（命题 14）求和时，首要的一步，就是要根据所给的数值级数，适当地配上一个幂级数，而这个幂级数不仅要以数值级数的各项为系数，而且还要能便于求出它的函数表达式．举例来说，第 33 题的解法就是一个典型的例子．

注 5．命题 38 是关于阿贝耳幂级数连续性定理的一个扩充．根据这个扩充，便可以推出斯托尔茨（O. Stolz，1842—1905）关于导级数的连续性定理（命题 39）．这个连续性定理当然也同样可以帮助我们寻求若干数值级数的和．

注 6．本章 § 4 中的不少命题，实际上与 § 1，§ 2 中的若干命题是互相对应着的．举例来说，命题 42 与命题 1 对应着；命题64，65 与命题 5，22，23 对应着；命题 58，59 分别与命题 24，25 对应着；命题 70 与命题 9 对应着．事实上，§ 4 所论述的题材是属于连续的形式，即积分的形式；而 § 1，§ 2 所讨论的则是离散的形式，即和式或级数的形式．

注 7．命题 66，67，69 以及 73 在讨论斯提捷变换（重叠的拉普拉斯（P. S. Laplace，1749—1827）变换）的收敛性条件时有其用

处，但此地不能详述．又命题 69 实际上是对应于陶伯立茨（O. Toeplitz）序列变换定理的一个积分形式．其中所出现的一个必要条件(见命题 72)

$$\bigvee_0^T(\phi)/|\varphi(T)|<K,$$

通常称之为一致有界条件，它在命题假设中是最主要的一部分．至于命题 71, 当然是一个特例．

注 8．本章的基本方法在调和分析中用处极大．命题 26—29, 51, 52 只不过是少数几个例子．在命题 51 中，如果将 A 改为负值 $A<0$, 则积分绝对值的估计就变得相当复杂．事实上，此时 $w=t+|A|/(nt^{\alpha})$就不是一个单调函数，而在

$$t=t_n=\left(\frac{1}{n}\alpha|A|\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

处取最小值．因此经过变数替换后，需要就 t_n 为分点，将积分裂为两段处理．经过较复杂的分析后，陈建功教授(1893—1971)曾得到如下的结果：设 $\alpha>0$, $A>0$, $n>0$, $0\leqslant a<b$, 则

$$\left|\int_a^b \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(nt+\frac{A}{t^{\alpha}}\right)dt\right|\leqslant C^{+}(A,\alpha)\cdot n^{-\rho},$$

此处 $\rho=\dfrac{2+\alpha}{2+2\alpha}$, $C^{+}(A,\alpha)$是只与 A,α 有关的常数．这个结果曾在陈建功教授所著"Denjoy-Fourier 级数的系数"一文中起着重要的作用(见 1954 年的《数学学报》, 263—277 页)．

注 9．那汤松(И. П. Натонсон, 1906—1964)的不等式(即命题 53)是命题 45 的类似物，它以加强关于 $\alpha(x)$的条件为代价减弱了关于 $f(x)$的条件．

第二章　幂级数在计算中的应用

本章的主要目的，在于通过命题及例题的方式，较集中地揭示幂级数乘法在某些解析计算中所起的工具作用. 我们将可以见到，借助于幂级数的乘法，能很顺利地寻求若干应用问题中所需要的数字解答以及一些简单有用的公式.

在本章中，幂级数时常以生成函数的地位而出现. 设 A_n 是一串待决定的数值($n=0,1,2,\cdots$). 如果我们能作出一个函数 $F(x)$，使它的幂级数展开式恰好是

$$F(x)=A_0+A_1x+A_2x+\cdots+A_nx^n+\cdots,$$

我们就说 $F(x)$ 是数列 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的生成函数. 也许，n 阶常系数齐次差分方程

$$f_\nu+a_1f_{\nu-1}+a_2f_{\nu-2}+\cdots+a_{n-1}f_{\nu-n+1}+a_nf_{\nu-n}=0$$
$$(\nu=1,2,3,\cdots)$$

的求解方法是大家都比较熟悉的运用生成函数的例子. 我们知道，如果这个差分方程还满足简单的初始条件:

$$f_0=1, f_{-1}=f_{-2}=\cdots=f_{-n+1}=0,$$

那末根据 f_ν 所满足的这个差分方程不难看出其生成函数 $F(x)=1+\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}f_\nu x^\nu$ 应满足下列线性关系:

$$F(x)=1-a_1xF(x)-a_2x^2F(x)-\cdots-a_nx^nF(x).$$

从而求得

$$F(x)=\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}.$$

如果把这样的函数 $F(x)$ 在坐标原点的邻域内展开成幂级数，就能

求得所要求的解 f_ν.

当然,我们没有要求读者非得熟悉这个例子才能阅读本章.我们在此只不过借它来解说一下生成函数是怎么回事. 生成函数的意义及其构作技巧会随着本章的讲述而明朗起来.

最初应用幂级数作为生成函数的是欧拉. 其后拉普拉斯曾广泛地采用这个方法. 最后麦克蒙(P. A. Mac-Mahon)著述两册组合分析时,则又补充了这种古典的数学分析技巧.

就内容来说, 本章的第一节涉及不定方程整数解组的个数问题, 故略带代数的或数论的性质. 第二节较详尽地收集了一些比较常见的有关二项系数的计算例题. 第三节我们简略地介绍了差分算子的简单应用, 其中包括欧拉的加速收敛技术. 在第四节我们引入伯努利(Jac. Bernoulli, 1654—1705)多项式并讨论其各种性质,然后阐述欧拉-马克劳林(C. Maclaurin, 1698—1746)的求和公式. 最后,在第五节我们列举少数几个古典的命题与例题,借以表明微分算子及函数方程在计算中的应用方式.

§1. 线性不定方程解的个数问题

整系数线性不定方程通常称为丢番图(Diophantus, 大约246—330)方程. 在本节中,主要是通过对多项式或幂级数相乘过程中同类项合并规律的观察,以寻找合适的幂级数作为生成函数,然后求得这类方程整数解组的个数.

各种恒等变换的技巧也是值得我们注意的.

1. 设 n 为一非负整数. 试求丢番图方程

$$x+2y=n$$

的非负整数解组 (x, y) 的个数.

[解] 以 A_n 表解组的个数,今先求生成 A_n 的生成函数 $F(\xi)$. 为此,试观察下列二级数相乘时同类项(同幂次的项)合并的过程:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\xi^{2n}\right)=\left(\sum_{x=0}^{\infty}\xi^x\right)\cdot\left(\sum_{y=0}^{\infty}\xi^{2y}\right)=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\xi^{x+2y}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{x+2y=n}1\right\}\xi^n(|\xi|<1).$$

我们见到: 方程 $x+2y=n$ 的每组非负整数解, 对应一个(系数为 1 的)ξ^n 项,因此上述乘积的级数中 ξ^n 项的系数就是

$$\sum_{x+2y=n}1=A_n.$$

所以,生成函数也就是

$$F(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\xi^n=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\xi^{2n}=\frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^2)}$$

$$(|\xi|<1).$$

但显然

$$\frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^2)}=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{1+\xi}+\frac{1}{1-\xi}+\frac{2}{(1-\xi)^2}\right\}\quad(|\xi|<1).$$

所以 $F(\xi)$的幂级数展开式为

$$F(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1+2(n+1)}{4}\xi^n\quad(|\xi|<1).$$

由是我们得到

$$A_n=\frac{1}{4}(2n+3+(-1)^n).$$

由于 A_n 必为一整数,故若以$\langle a\rangle$表与实数$a\left(a\neq\frac{1}{2}\right)$最接近的整数,则$A_n=\left\langle\frac{2n+3}{4}\right\rangle$.

2. 以 A_n 表下列正整数系数不定方程的非负整数解组$(x_1, x_2, \cdots, x_k)$的个数:

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k=n,$$

则 A_n 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n = \frac{1}{(1-\zeta^{a_1})(1-\zeta^{a_2})\cdots(1-\zeta^{a_k})}. \qquad \text{(Euler)}$$

［证］ 因为

$$\begin{aligned}
&(1-\zeta^{a_1})^{-1}(1-\zeta^{a_2})^{-1}\cdots(1-\zeta^{a_k})^{-1}\\
&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{a_1 n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{a_2 n}\right)\cdots\left(\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{a_k n}\right)\\
&=\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_k=0}^{\infty}\zeta^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n}1\right\}\zeta^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\zeta^n \quad (|\zeta|<1).
\end{aligned}$$

［注意］ 当 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 互不相等时，A_n 可以看作是 n 元的货币兑换成面值分别为 $a_1, a_2, \cdots$，a_k 的货币的不同兑换方式数. 故本命题亦称为货币兑换问题.

3. 试证丢番图方程

$$x+2y+3z=n$$

的非负整数解组的个数 $A_n=\left\langle\frac{(n+3)^2}{12}\right\rangle$. (Hardy)

［证］ 令 $\omega=e^{2\pi i/3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$（$\omega$ 为虚立方根），则由命题 2 可知生成函数为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta^3)}\\
&\quad=\frac{1}{(1-\zeta)^3(1+\zeta)(1-\omega\zeta)(1-\omega^2\zeta)}\\
&\quad=\frac{1}{6(1-\zeta)^3}+\frac{1}{4(1-\zeta)^2}+\frac{17}{72(1-\zeta)}+\frac{1}{8(1+\zeta)}\\
&\quad\quad+\frac{1}{9(1-\omega\zeta)}+\frac{1}{9(1-\omega^2\zeta)}
\end{aligned}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{7}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\zeta^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\zeta^n(|\zeta|<1).$$

由于

$$\left|-\frac{7}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right|\leqslant\frac{32}{72}<\frac{1}{2},$$

且 A_n 必为整数，故 $A_n=\left\langle\frac{(n+3)^2}{12}\right\rangle$.

4. 试证丢番图方程

$$x+2y+4z=n$$

的非负整数解组的个数 $A_n=\left\langle\frac{(n+2)(n+5)+(-1)^n n}{16}\right\rangle$.

［证］ 按命题 2, A_n 的发生函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\zeta^n=(1-\zeta)^{-1}(1-\zeta^2)^{-1}(1-\zeta^4)^{-1}$$

$$=(1+\zeta)(1+\zeta^2)^2(1-\zeta^4)^{-3}$$

$$=(1+\zeta+2\zeta^2+2\zeta^3+\zeta^4$$

$$+\zeta^5)\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+2}{2}\zeta^{4m}(|\zeta|<1).$$

由是易知

$$A_{4m}=A_{4m+1}=\binom{m+1}{2}+\binom{m+2}{2}=(m+1)^2,$$

$$A_{4m+2}=A_{4m+3}=2\binom{m+2}{2}=(m+1)(m+2).$$

再把 m 用 n 表出，易见 A_n 即有如题文所示之表达式.

5. 试证下列各丢番图方程

$$x+2y+5z=n,\quad x+3y+5z=n,$$

$$x+2y+3z+5w=n$$

的非负整数解组的个数分别为

$$A_n=\left\langle\frac{(n+4)^2}{20}\right\rangle,\ A_n=\left\langle\frac{(n+3)(n+6)}{30}\right\rangle,$$

$$A_n=\left\langle\frac{(n+3)(2n+9)(n+9)}{360}\right\rangle.$$

[提示] 按题 4 的方法求解.

6. 以 n 册完全相同的书分送给 k 个朋友($n\geqslant k$), 每人至少得一册. 问有多少种分配方式?

[解] 若 k 个朋友中亦有得书零册者, 则此问题即相当于求方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$$

的非负整数解组($x_1, x_2, \cdots, x_k$) 的个数 A_n. 由命题 2 可知其发生函数为

$$(1-\xi)^{-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k}{n}(-1)^n\xi^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n+1}{k-1}\xi^n \quad (|\xi|<1).$$

故 $A_n=\binom{k+n-1}{k-1}$. 今规定每个朋友至少得一册, 则分配数便等于

$$A_{n-k}=\binom{k+(n-k)-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}.$$

7. 问 k 个变数的 n 次齐次多项式最多可能有多少个不同的项?

8. 试证下列各个丢番图方程的非负整数解组的总个数为 $n+1$, 这些方程是:

$$x+2y=n,\ 2x+3y=n-1,\ 3x+4y=n-2,\ \cdots,$$
$$(n+1)x+(n+2)y=0. \qquad \text{(Catalan)}$$

[证] 方程 $\nu x+(\nu+1)y=n+1-\nu$ 的非负整数解组的个数应是 $(1-\xi^\nu)^{-1}(1-\xi^{\nu+1})^{-1}$ 幂级数展开式中 $\xi^{n+1-\nu}$ 项的系数, 亦即 $\xi^{\nu-1}(1-\xi^\nu)^{-1}(1-\xi^{\nu+1})^{-1}$ 的展开式中 ξ^n 项的系数. 故若设所求之总个数为 A_n, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n = \frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^2)} + \frac{\xi}{(1-\xi^2)(1-\xi^3)} + \cdots$$

$$+ \frac{\xi^\nu}{(1-\xi^{\nu+1})(1-\xi^{\nu+2})} + \cdots = \frac{1}{\xi(1-\xi)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\xi^{\nu+1}} - \frac{1}{1-\xi^{\nu+2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\xi(1-\xi)} \left(\frac{1}{1-\xi} - 1 \right) = \frac{1}{(1-\xi)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \xi^n \ (|\xi| < 1).$$

所以 $A_n = n+1$.

9. 设以 $\tau(m)$ 表自然数 m 的除数的个数，例如 $\tau(4)=3$. 试证

$$x+2y=n-1.\ 2x+3y=n-3,\ 3x+4y=n-5,\ \cdots$$

这些丢番图方程非负整数解组的总个数 $A_n = n+2-\tau(n+2)$.

(Catalan)

［证］ 一如上题之法，

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^{2\nu-1}}{(1-\xi^\nu)(1-\xi^{\nu+1})} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^{\nu-1}}{1-\xi} \left(\frac{1}{1-\xi^\nu} - \frac{1}{1-\xi^{\nu+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{(1-\xi)^2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi^{\nu-1}}{1-\xi^{\nu+1}}$$

$$= \frac{1}{(1-\xi)^2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{(k+1)(\nu+1)-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \xi^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{(k+1)(\nu+1)=n+2 \\ \nu \geqslant 1,\, k \geqslant 0}} 1 \right\} \xi^n \ (|\xi| < 1).$$

显然方程 $(k+1)(\nu+1)=n+2$ 的整数解对 (ν, k) $(\nu \geqslant 1,\ k \geqslant 0)$ 的个数为 $\tau(n+2)-1$, 故 $A_n = n+2-\tau(n+2)$.

10. 试证

$$x+4y=3n-1,\ 4x+9y=5n-4,\ 9x+16y=7n-9,\ \cdots$$

这些丢番图方程的非负整数解组的总个数为 n. (Cesàro)

［证］ 同上题，解组的总个数 A_n 为下列生成函数的幂级数展开式中的常数项：

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\zeta^{\nu^2-(2\nu+1)n}}{(1-\zeta^{\nu^2})(1-\zeta^{(\nu+1)^2})}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\zeta^{-(2\nu+1)n}}{1-\zeta^{2\nu+1}}\left(\frac{1}{1-\zeta^{\nu^2}}-\frac{1}{1-\zeta^{(\nu+1)^2}}\right)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\zeta^{-(2\nu+1)(n-\mu)}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta^{k\nu^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\zeta^{k(\nu+1)^2}\right\}.$$

所以 A_n 即是如下二解集 S,T 的个数 $\overline{\overline{S}},\overline{\overline{T}}$ 之差：

$$A_n=\overline{\overline{S}}-\overline{\overline{T}},$$

$$S=\{(k,\nu,\mu)\,|\,k\nu^2=(2\nu+1)(n-\mu),\ k\geqslant1,\ \nu\geqslant1,\ \mu\geqslant0\},$$

$$T=\{(k,\nu,\mu)\,|\,k(\nu+1)^2=(2\nu+1)(n-\mu),\ k\geqslant1,\ \nu\geqslant1,\ \mu\geqslant0\}.$$

显然集 S 可拆成以下二集之和：

$$S_1=\{(k,1,\mu)\,|\,k=3(n-\mu),\ k\geqslant1,\ \mu\geqslant0\},$$

$$S_2=\{(k,\nu,\mu)\,|\,k(\nu+1)^2=(2\nu+3)(n-\mu),\ k\geqslant1,\ \nu\geqslant1,\ \mu\geqslant0\}.$$

其中，S_2 是与 T 成一一对应的．事实上，若 $(k,\nu,\mu)\in T$，则 $k=\frac{(2\nu+1)(n-\mu)}{(\nu+1)^2}$ 是正整数．由于 $2\nu+1$ 与 $(\nu+1)^2$ 互质，所以 $\frac{n-\mu}{(\nu+1)^2}$ 亦必为正整数．因此 $\left(k+\frac{n-\mu}{(\nu+1)^2},\ \nu,\ \mu\right)\in S_2$．这说明 $\overline{\overline{T}}\leqslant\overline{\overline{S}}_2$．反之，由 $2\nu+3$ 与 $(\nu+1)^2$ 互质可证 $\overline{\overline{T}}\geqslant\overline{\overline{S}}_2$．总之，$\overline{\overline{T}}=\overline{\overline{S}}_2$．另一方面，$\overline{\overline{S}}_1=n$．故 $A_n=\overline{\overline{S}}-\overline{\overline{T}}=\overline{\overline{S}}_1+\overline{\overline{S}}_2-\overline{\overline{T}}=n$．

11．设 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ 为 k 个互质的正整数，以 A_n 表方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_n=n$ 的非负整数解组的个数．则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^{k-1}}=\frac{1}{(k-1)!\,a_1a_2\cdots a_k}.\qquad\text{(Laguerre)}$$

［证］ A_n 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n = \left(\prod_{\nu=1}^{k} (1-\zeta^{a_\nu}) \right)^{-1}.$$

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 互质，上式连乘积的倒数表成最简分式时有如下的形式：

$$\left(\prod_{\nu=1}^{k} (1-\zeta^{a_\nu}) \right)^{-1} = \frac{c_0}{(1-\zeta)^k} + \frac{c_1}{(1-\zeta)^{k-1}} + \cdots$$

$$+ \frac{c_{k-1}}{1-\zeta} + \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{1-\omega_j \zeta},$$

其中 $\omega_j \neq 1$ 在单位圆周上，且互不相同．是故 A_n 的主项是 $\dfrac{c_0}{(1-\zeta)^k}$ 的展开式中 ζ^n 的系数，即

$$A_n \sim c_0 \binom{k+n-1}{k-1} \sim c_0 \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \quad (n \to \infty).$$

但显然有

$$c_0 = \lim_{\zeta \to 1} (1-\zeta)^k \prod_{\nu=1}^{k} (1-\zeta^{a_\nu})^{-1}$$

$$= \lim_{\zeta \to 1} \prod_{\nu=1}^{k} (1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{a_\nu-1})^{-1}$$

$$= \prod_{\nu=1}^{k} a_\nu^{-1}.$$

从上述推证过程可见尚能较精密地写出

$$A_n = \frac{n^{k-1}}{(k-1)!\,a_1 a_2 \cdots a_k} + O(n^{k-2}) \quad (n \to \infty).$$

12. 设以 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 诸正整数作项相加（一数可连用数次）时，总和为 n 的一切不同的加法方式的种数为 B_n．试确定 B_n 的生成函数．

［解］ 设以 ν 项表出 n 的加法方式种数为 $B_{n,\nu}$．则从观察下

列多项式自乘时同类项合并的过程可知，其 ζ^n 项的系数即为 $B_{n,\nu}$，即

$$(\zeta^{a_1}+\zeta^{a_2}+\cdots+\zeta^{a_k})^{\nu}=\sum_{n=\nu}^{\infty}B_{n,\nu}\zeta^n.$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\zeta^n=\sum_{n=0}^{\infty}(B_{n,0}+B_{n,1}+\cdots+B_{n,n})\zeta^n$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=\nu}^{\infty}B_{n,\nu}\zeta^n=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\zeta^{a_1}+\zeta^{a_2}+\cdots+\zeta^{a_k})^{\nu}$$

$$=\frac{1}{1-\zeta^{a_1}-\zeta^{a_2}-\cdots-\zeta^{a_k}} \qquad \text{(Euler)}$$

13. 将骰子一颗连掷十次，问共出现 30 点的概率是多少？

［解］ 设以 B_n 表共出现 n 点的方式总数，则其生成函数显然为

$$\sum_{n=10}^{60}B_n\zeta^n=(\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4+\zeta^5+\zeta^6)^{10}=\zeta^{10}\left(\frac{1-\zeta^6}{1-\zeta}\right)^{10}.$$

由于

$$(1-\zeta)^{-10}=1+\binom{10}{1}\zeta+\binom{11}{2}\zeta^2+\binom{12}{3}\zeta^3+\cdots$$

$$+\binom{10+k-1}{k}\zeta^k+\cdots,$$

$$(1-\zeta^6)^{10}=1-\binom{10}{1}\zeta^6+\binom{10}{2}\zeta^{12}-\binom{10}{3}\zeta^{18}+\cdots.$$

故 $(1-\zeta^6)^{10}(1-\zeta)^{-10}$ 的展开式中 ζ^{20} 项的系数为

$$B_{30}=\binom{29}{20}-\binom{10}{1}\binom{23}{14}+\binom{10}{2}\binom{17}{8}-\binom{10}{3}\binom{11}{2}=2930455.$$

因此所要求的概率便是 $2930455/6^{10}=0.048464$.

14. 设有 k 个法码，其重分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 克（均为整数）. 今要在天平上衡量重为 n 克之物. 问有多少种不同的方式？

［解］ (i) 若规定法码只加在天平的一端，则不同方式总数 c_n 的生成函数便是 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n = (1+\xi^{a_1})(1+\xi^{a_2})\cdots(1+\xi^{a_k})$.

(ii) 若允许法码加在天平的两端，则所求方式数 C_n 的生成函数便是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \xi^n = (\xi^{-a_1}+1+\xi^{a_1})(\xi^{-a_2}+1+\xi^{-a_2})\cdots(\xi^{-a_k}+1+\xi^{a_k}).$$

15. 一个正整数表作正整数之和的方式总数(和式不论次序)称为 n 的分析数，记作 $p(n)$. 例如 $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$, 故 $p(5)=7$. 试证 $p(n)$ 的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\xi^n = \frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^2)(1-\xi^3)\cdots}.$$

16. 试证任何一个正整数表作相异正整数之和的方式数等于表作相异或相同奇数之和的方式总数(和式均不论次序). 例如就 6 来看，前者有 $6, 1+5, 2+4, 1+2+3$ 共四法，后者有 $1+5, 3+3, 1+1+1+3, 1+1+1+1+1+1$ 亦四法. (Euler)

［证］ 易见二者之生成函数分别为

$$(1+\xi)(1+\xi^2)(1+\xi^3)\cdots, \frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^3)(1-\xi^5)\cdots},$$

但它们皆与 $\frac{1-\xi^2}{1-\xi}\cdot\frac{1-\xi^4}{1-\xi^2}\cdot\frac{1-\xi^6}{1-\xi^3}\cdots$ 相等(当 $|\xi|<1$ 时).

［另证］ 二生成函数相等的事实亦可如此证明：任何正整数 n 可唯一地表成 $2^j(2k+1)$, 这里 j 和 k 为非负整数. 故

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\xi^n) = \prod_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{\infty}(1+\xi^{2^j(2k+1)})$$

$$= \prod_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1-\xi^{2^{j+1}(2k+1)}}{1-\xi^{2^j(2k+1)}}$$

$$=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-\zeta^{2k+1}}.$$

17. 试证当$|\zeta|<1$时有下列恒等式成立:

$$(1+\zeta)(1+\zeta^3)(1+\zeta^5)(1+\zeta^7)\cdots$$

$$=1+\frac{\zeta}{1-\zeta^2}+\frac{\zeta^4}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^4)}+\frac{\zeta^9}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^4)(1-\zeta^6)}+\cdots. \qquad \text{(Euler)}$$

[证] 采用欧拉原来的办法. 先引进另外一个参变数, 试考虑

$$F(\alpha)=F(\alpha,\zeta)=(1+\alpha\zeta)(1+\alpha\zeta^3)(1+\alpha\zeta^5)\cdots$$

$$=1+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots,$$

其中$c_n=c_n(\zeta)$都与α无关. 显然我们有

$$F(\alpha)=(1+\alpha\zeta)F(\alpha\zeta^2),$$

亦即

$$1+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots=(1+\alpha\zeta)(1+c_1\cdot\alpha\zeta^2+c_2\cdot(\alpha\zeta^2)^2+\cdots).$$

于是比较两端幂级数的系数, 便得到

$$c_1=\zeta+c_1\zeta^2,\ c_2=c_1\zeta^3+c_2\zeta^4,\ \cdots,\ c_m=c_{m-1}\zeta^{2m-1}+c_m\zeta^{2m},\ \cdots,$$

从而

$$c_m=\frac{\zeta^{2m-1}}{1-\zeta^{2m}}c_{m-1}=\frac{\zeta^{1+3+\cdots+(2m-1)}}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^4)\cdots(1-\zeta^{2m})}$$

$$=\frac{\zeta^{m^2}}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^4)\cdots(1-\zeta^{2m})}.$$

因此最后令$\alpha=1$即得出命题中的恒等式.

18. 试证当$|\zeta|<1$时有下列恒等式成立:

$$(1+\zeta^2)(1+\zeta^4)(1+\zeta^6)(1+\zeta^8)\cdots$$

$$=1+\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}+\frac{\zeta^{2\cdot3}}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^4)}+\frac{\zeta^{3\cdot4}}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^4)(1-\zeta^6)}+\cdots. \qquad \text{(Euler)}$$

[提示] 于命题17的证明中最后令$\alpha=\zeta$即得.

19. 试证当$|\zeta|<1$时有下列恒等式成立:

$$\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta^3)\cdots}=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\zeta^\nu}{(1-\zeta)(1-\zeta^2)\cdots(1-\zeta^\nu)}.$$

20. 试证当$|\zeta|<1$时

$$\prod_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\zeta^{k\cdot j!}=\frac{1}{1-\zeta}.$$

[提示]

$$(1+\zeta)(1+\zeta^{2!}+\zeta^{2\cdot 2!})\cdots(1+\zeta^{m!}+\zeta^{2\cdot m!}+\cdots+\zeta^{m\cdot m!})$$
$$=\frac{1-\zeta^{2!}}{1-\zeta}\cdot\frac{1-\zeta^{3!}}{1-\zeta^{2!}}\cdot\frac{1-\zeta^{4!}}{1-\zeta^{3!}}\cdots\frac{1-\zeta^{(m+1)!}}{1-\zeta^{m!}}=\frac{1-\zeta^{(m+1)!}}{1-\zeta}$$

21. 设以 D_n 表 n 的二进制表示形式中各位数字之和. 试证

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+\alpha\zeta^{2^\nu})=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{D_n}\zeta^n.$$

[提示] $(1+\alpha\zeta)(1+\alpha\zeta^2)\cdots(1+\alpha\zeta^{2^m})=\sum\limits_{n=0}^{2^{m+1}-1}\alpha^{D_n}\zeta^n.$

22. 以 $(x_1, x_2\cdots, x_k)$ 表 k 维空间的一个点. 若其坐标值 x_1, $x_2, \cdots, x_k$ 均为整数, 则称之为格点. 试证明适合下列不等式

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|\leqslant N \quad (N\text{为正整数})$$

的格点$(x_1, x_2, \cdots, x_k)$的个数为

$$A_N=2^k\binom{N}{k}+2^{k-1}\binom{k}{1}\binom{N}{k-1}+2^{k-2}\binom{k}{2}\binom{N}{k-2}+\cdots+1.$$

[证] 设$\nu\geqslant 0$. 易知方程$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|=\nu$的解数即等于下式中 ζ^ν 的系数 a_ν:

$$(1+2\zeta+2\zeta^2+2\zeta^3+\cdots)^k=\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^k=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\zeta^\nu.$$

而所求的格点个数 A_N 显然适合

$$A_N=a_0+a_1+\cdots+a_N.$$

因此 A_N 即是

$$\sum_{\nu=0}^{N}\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^k \zeta^{N-\nu}=\frac{(1+\zeta)^k(1-\zeta^{N+1})}{(1-\zeta)^{k+1}}$$

的展开式中 ζ^N的系数. 亦即等于展开式

$$\frac{(1+\zeta)^k}{(1-\zeta)^{k+1}}=\frac{(2\zeta+1-\zeta)^k}{(1-\zeta)^{k+1}}=(2\zeta)^k(1-\zeta)^{-k-1}$$

$$+\binom{k}{1}(2\zeta)^{k-1}(1-\zeta)^{-k}$$

$$+\binom{k}{2}(2\zeta)^{k-2}(1-\zeta)^{-k+1}+\cdots$$

中 ζ^N 的系数. 而此系数正是

$$2^k\binom{N}{k}+2^{k-1}\binom{k}{1}\binom{N}{k-1}+2^{k-2}\binom{k}{2}\binom{N}{k-2}+\cdots+1.$$

23. 试证适合下列不等式(n, s 均为正整数)

$$-n\leqslant x, y, z\leqslant n,$$

$$-s\leqslant x+y+z\leqslant s$$

的格点(x, y, z)的个数等于积分值

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(2n+1)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^3\frac{\sin\frac{1}{2}(2s+1)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt. \qquad \text{(Pólya)}$$

[提示] 试考虑下列生成函数

$$(\zeta^{-n}+\zeta^{-n+1}+\cdots+\zeta^{-1}+1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1}+\zeta^n)^3$$

之展开式中 $\zeta^{-s}, \zeta^{-s+1}, \cdots, 1, \cdots, \zeta^{s-1}$, ζ^s 各项系数之和, 并注意有如下的恒等式可资利用:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{\nu=-k}^{k}a_\nu\zeta^\nu\right)\zeta^{-\mu}dt=a_\mu \quad (\zeta=e^{it}, -k\leqslant\mu\leqslant k).$$

$$\sum_{\nu=-m}^{m}\zeta^{\nu}=\frac{\zeta^{-\frac{1}{2}(2m+1)}-\zeta^{\frac{1}{2}(2m+1)}}{\zeta^{-\frac{1}{2}}-\zeta^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(2m+1)t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

24. 把一凸 n 边形用仅可能在顶点相交的对角线完全剖分成三角形. 问有多少种不同的剖分方式? (Dunkel)

[解] 以 A_n 表剖分方式数. 又设凸多边形的顶点依次为 P_1, P_2, $\cdots$, P_n. 则含三角形 $P_1P_iP_n$ 的剖分方式数当 $i=2, 3, 4, 5, \cdots, n-4, n-3, n-2, n-1$ 时依次为

A_{n-1}, A_{n-2}, $A_{n-3}\cdot A_4$, $A_{n-4}\cdot A_5$, $\cdots$, $A_5\cdot A_{n-4}$, $A_4\cdot A_{n-3}$, A_{n-2}, A_{n-1}. 显然 $A_3=1$, 若补充定义 $A_2=1$, 则

$$A_n=\sum_{i=2}^{n-1}A_i\cdot A_{n-i+1}.$$

命 $F(\zeta)=\sum_{n=2}^{\infty}A_n\zeta^{n-2}$. 则

$$F(\zeta)^2=\left(\sum_{n=2}^{\infty}A_n\zeta^{n-2}\right)^2=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{i=2}^{n-1}A_iA_{n-i+1}\right)\zeta^{n-3}$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}A_n\zeta^{n-3}=(F(\zeta)-1)\cdot\zeta^{-1}.$$

从而

$$F(\zeta)=\frac{1-\sqrt{1-4\zeta}}{2\zeta}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}\zeta^{n-2}.$$

所以我们求得

$$A_n=\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}.$$

25. 试证对任何正整数 k,

$$\varphi_k=\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}=\frac{1}{2k-1}\binom{2k-1}{k}$$

都是整数, 且满足下列关系式:

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_{n-i}. \qquad \text{(Birkhoff)}$$

［提示］ 令 $\Phi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \zeta^n$. 则易

$$证\ \Phi(\zeta) = -\frac{1}{2}(\sqrt{1-4\zeta} - 1).$$

因此 $\Phi(\zeta)$满足下列关系式:

$$(2\Phi(\zeta)-1)^2 = 1-4\zeta,$$

即

$$\Phi(\zeta)^2 = \Phi(\zeta) - \zeta.$$

比较幂级数展开式的系数可以得到题中的关系式. 然后由 $\varphi_1 = 1$ 经完全归纳法即得 φ_k 全为整数之结论.

§2. 有关二项系数的计算

二项系数的生成函数是二项展开式. 因此有关二项系数的计算可以通过二项展开式在特殊点的计值、二项展开式的相乘、求导、求积分、变量替换等方式来实现. 在这里, 特定二项展开式的选择技巧是值得注意的. 其中较为复杂的生成函数往往是经适当选择的两个(或数个)二项展开式配置起来的, 目的是使它们乘积级数(幂级数)中的通项的系数恰好相当于所要求值的关于二项系数的四则运算表达式.

此外, 组合变换的互逆公式(命题 48)亦使许多已知的组合系数(二项系数)关系式产生出新的对偶关系式, 因而值得我们留意.

本节各题中, 如无特定说明, n, m, k, ν 等均表非负整数, 而 x, y, t 等则表实数.

26. 试证 $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$.

27. 试证 $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$.

[证] 以$(1+x)^n=\sum_0^n\binom{n}{k}x^k$ 与 $(1+x)^n=\sum_0^n\binom{n}{n-k}x^{n-k}$

相乘，乘积多项式中 x^n 的系数为$\sum_0^n\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_0^n\binom{n}{k}^2$，而

$(1+x)^{2n}$ 直接展开式$\sum_{\nu=0}^{2n}\binom{2n}{\nu}x^\nu$ 中 x^n 的系数是 $\binom{2n}{n}$. 由是即得

本命题.

28. 试证

$$\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+\binom{2n}{2}^2-\cdots-\binom{2n}{2n-1}^2+\binom{2n}{2n}^2$$

$$=(-1)^n\binom{2n}{n}.$$

[提示] 考虑下列二式乘积中的 x^{2n} 项的系数即可:

$$(1-x)^{2n}=\sum_0^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k x^k,\quad (1+x)^{2n}=\sum_0^{2n}\binom{2n}{k}x^k.$$

29. 试证

$$\binom{2n}{1}^2+\binom{2n}{3}^2+\binom{2n}{5}^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\binom{4n}{2n}+(-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\right\}.$$

[提示] 应用例题 27, 28 即得.

30. 设 x 是任意实数而 k 为非负整数. 试证

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{x}{\nu}\binom{x}{k-\nu}$$

$$=\begin{cases} 0 & (\text{若 } k \text{ 为奇数}), \\ (-1)^{\frac{k}{2}}\dbinom{x}{\frac{k}{2}} & (\text{若 } k \text{ 为偶数}). \end{cases}$$

［证］ 当$|t|<1$时有

$$(1-t)^x=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{x}{\nu}t^\nu,\ (1+t)^x=\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{x}{\mu}t^\mu$$

因此$(1-t^2)^x=(1-t)^x(1+t)^x$的展开式中t^k项的系数

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } k \text{ 为奇数时为 } 0\\ \text{当 } k \text{ 为偶数时为}(-1)^{\frac{k}{2}}\dbinom{x}{\frac{k}{2}}\end{array}\right\}$$

$$=\sum_{\nu+\mu=k}(-1)^\nu\binom{x}{\nu}\binom{x}{\mu}=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{x}{\nu}\binom{x}{k-\nu}.$$

31. 试证

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+m}{n}=\binom{n+m+1}{n+1}.$$

（朱世杰）

［提示］ 显然对m实行完全归纳法即可得证．另外的证法是考虑下列二式乘积中的x^m项的系数：

$$(1-x)^{-n-1}=\sum_{0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^k,\ (1-x)^{-1}=\sum_{0}^{\infty}x^k \qquad (|x|<1).$$

32. 试证$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+m}{k}(-1)^k=(-1)^n\binom{n+m-1}{n}$.

［证］ 当$m=0$时等式右端按定义为零．此时等式对任意非负整数n成立．现设此式在某个m值对任意非负整数n皆已成立．则以$n+1$代n的地位（由于n的任意性）得

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1+m}{k}(-1)^k=(-1)^{n+1}\binom{n+m}{n+1}.$$

从而

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+m+1}{k}(-1)^k=(-1)^{n+1}\binom{n+m}{n+1}$$
$$-(-1)^{n+1}\binom{n+m+1}{n+1}=(-1)^n\binom{n+m}{n}.$$

这就是原式中m换成$m+1$的情形．于是关于m的归纳推理已告完成．

33. 求由下列等式定义的F_n和G_n:

$$F_n=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots.$$
$$G_n=\binom{n}{0}-\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}-\cdots.$$

［解］ 利用下列杨辉恒等式

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

可知F_n和G_n分别满足关系式

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},$$
$$G_n=G_{n-1}-G_{n-2}.$$

又 $F_0=F_1=G_0=G_1=1$．所以F_n就是所谓斐波那契（L. Fibonacci, 大约 1170—1250）数列，而用完全归纳法可以证明

$$G_n=\begin{cases}0 & (\text{当 } n=3m+2),\\ (-1)^m & (\text{当 } n=3m \text{ 或 } 3m+1).\end{cases}$$

［另解］ F_n显然是下列生成函数中x^n项的系数:

$$x^n(1+x)^n+x^{n-1}(1+x)^{n-1}+x^{n-2}(1+x)^{n-2}+\cdots+1$$
$$=\frac{1-x^{n+1}(1+x)^{n+1}}{1-x(1+x)}.$$

也就是$\Phi(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$的幂级数展开式中$x^n$项的系数．由

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-ax}-\frac{b}{1-bx}\right)$$

得 $\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}x^n$，其中 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 所以

$$F_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}.$$

G_n 也可同样求得.

34. 试证 $\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\binom{m}{k-\nu}=\binom{n+m}{k}$.

35. 试证对一切实数 x, y 而言，常有

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{x}{\nu}\binom{y}{k-\nu}=\binom{x+y}{k}. \qquad \text{(Vandermonde)}$$

［证］ 如同命题 30，考虑 $(1+t)^{x+y}=(1+t)^x\cdot(1+t)^y$ 的展开式中 t^k 项的系数即可得证.

［另证］ 注意命题 34 的等式的两端都是整变数 n 的 k 次代数多项式. 当 n 被换成实变数 x 时，它对多于 k 个的 x 值已成立. 因此对任意 x 值都成立. 同理，m 亦可换成实变数 y.

36. 设 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$，即 k 为 $n/2$ 的整数部分. 试证

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\binom{n+1}{\nu}\binom{2n-2\nu}{n}=n+1.$$

［提示］ 考察 $(1+x)^{n+1}=(1-x^2)^{n+1}(1-x)^{-n-1}$ 展开式中 x^n 项的系数.

37. 试证 $\sum_{\nu=0}^{[n/2]}\binom{2n-2\nu}{n}\binom{n}{\nu}(-1)^{\nu}=2^n$.

［提示］ 考察下列生成函数中 x^n 项的系数便得:

$$f(x)=(1-x^2)^n(1-x)^{-n-1}=(1+x)^n(1-x)^{-1}.$$

38. 试证

$$\sum_{\nu=0}\binom{\nu}{n}\binom{k-\nu}{m}=\binom{k+1}{n+m+1}.$$

［证］ 当和式的流标在二项系数的上位时，宜考虑采用展开式

$$(1-x)^{-n-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{n}x^{\nu} \qquad (|x|<1).$$

由于当 $\nu=0,1,\cdots,n-1$ 时 $\binom{\nu}{n}=0$，所以可以把上式作如下改写，这样对本题来说较为方便:

$$(1-x)^{-n-1}=x^{-n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu}{n}x^{\nu}.$$

基于此，我们考察

$$(1-x)^{-(n+m+1)-1}=(1-x)^{-n-1}(1-x)^{-m-1}$$

的展开式中 x^{k-n-m} 项的系数即得.

39. 试证 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\binom{n+k+1}{2k+1}=n+1.$

［证］ 作如下形式的生成函数:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-x+2)^{n+k+1}x^{k}.$$

由是可见其中含 x^n 的项便是

$$A_nx^n=\sum_{k=0}^{n}(-x)^{n-k}2^{2k+1}\binom{n+k+1}{n-k}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k+1}\binom{n+k+1}{2k+1}x^n.$$

另一方面，容易看出

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(2-x)^{n+k+1}x^k=(2-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2x-x^2)^k$$

$$=(2-x)^{n+1}\frac{1-(2x-x^2)^{n+1}}{1-(2x-x^2)}$$

$$=-x^{n+1}(2-x)^{2(n+1)}(1-x)^{-2}+(2-x)^{n+1}(1-x)^{-2}$$

$$=-x^{n+1}(2-x)^{2(n+1)}(1-x)^{-2}+\binom{n+1}{0}(1-x)^{n-1}$$

$$+\cdots+\binom{n+1}{n-1}+\binom{n+1}{n}(1-x)^{-1}+\binom{n+1}{n+1}(1-x)^{-2}.$$

显然含 x^n 的项只在上式的最后两项中．而在这两项中，x^n 项的系数皆为 $n+1$．故

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k+1}\binom{n+k+1}{2k+1}=2(n+1).$$

40. 试证 $\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n\binom{n}{n}$

$$=\begin{cases}0(n\neq 1),\\1(n=1).\end{cases}$$

［证］ 显然有

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}t+3\binom{n}{3}t^2-\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}t^{n-1}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\nu(-t)^{\nu-1}=-\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{d}{dt}(-t)^{\nu}$$

$$=-\frac{d}{dt}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(-t)^{\nu}=-\frac{d}{dt}(1-t)^n=n(1-t)^{n-1}.$$

令 $t\to 1$ 即得所要证的等式．

41. 试证 $\sum_{\nu=p}^{n}\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{p}=\binom{n}{p}2^{n-p}$．

［证］ $\sum_{\nu=p}^{n}\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{p}t^{\nu-p}=\sum_{\nu=p}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{d}{dt}\right)^p\frac{t^{\nu}}{p!}$

$$=\frac{1}{p!}\left(\frac{d}{dt}\right)^p\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}t^{\nu}=\frac{1}{p!}\left(\frac{d}{dt}\right)^p(1+t)^n$$

$$=\binom{n}{p}(1+t)^{n-p},$$

令 $t=1$ 即得所要证的等式.

［另证］ 注意

$$\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{p}=\frac{n!}{(n-\nu)!\nu!}\cdot\frac{\nu!}{p!(\nu-p)!}$$

$$=\frac{n!}{p!(n-p)!}\cdot\frac{(n-p)!}{(n-\nu)!(\nu-p)!}$$

$$=\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-\nu}.$$

故得

$$\sum_{\nu=p}^{n}\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{p}=\binom{n}{p}\sum_{\nu=p}^{n}\binom{n-p}{n-\nu}=\binom{n}{p}(1+1)^{n-p}=\binom{n}{p}2^{n-p}.$$

42. 试证 $\sum_{\nu=p}^{n}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{p}=\begin{cases}0(n>p),\\(-1)^{n}(n=p).\end{cases}$

［提示］ 可仿题 41 的证法来证.

43. 试证

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

［证］ $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\int_{0}^{1}x^{k-1}dx$

$$=\int_{0}^{1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}x^{k-1}dx=\int_{0}^{1}\frac{1-(1-x)^{n}}{x}dx$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{1-t^{n}}{1-t}dt=\int_{0}^{1}(1+t+t^{2}+\cdots+t^{n-1})dt$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

44. 试证下列等式:

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i+1}\binom{n}{i}=\frac{1}{n+1}.$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(i+1)^2}\binom{n}{i}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}.$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(i+1)^3}\binom{n}{i}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{j+1}.$

45. 试证对 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 有

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$
$$=(n-k)\binom{n}{k}\int_b^{a+b}t^k(a+b-t)^{n-k-1}dt.$$

46. 试证 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k+1}=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$

[证] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k+1}=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{m+k}dx$

$$=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

47. 试证(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{x+k}=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(x+k)(x+k+1)\cdots(x+k+n)}$

$$=\frac{2^n}{x(x+2)(x+4)\cdots(x+2n)}$$

[证] (i) 是命题 46 的推广, 但可以如同命题 46 那样证明.

(ii) 记左端的和为 S_n, 利用(i)的等式, 我们有

$$S_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^\nu}{x+k+\nu}\binom{n}{k}\binom{n}{\nu}$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{\mu=0}^{2n}\frac{1}{x+\mu}\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^\nu\binom{n}{\mu-\nu}\binom{n}{\nu}.$$

再利用题 30 的等式，得

$$S_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+2k}\binom{n}{k}$$

$$=\frac{1}{2\cdot n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\left(\frac{x}{2}+k\right)}\binom{n}{k}.$$

最后又利用(i)的等式，得

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{x}{2}+n\right)}$$

$$=\frac{2^n}{x(x+2)(x+4)\cdots(x+2n)}$$

48. (组合变换的互逆公式)设 $g(k)$ 表任一函数而 $f(n)$ 的定义如下：

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k g(k)\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{1}$$

则

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f(k)\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{2}$$

反之，由(2)亦可推出(1).

[证] 注意本命题表明关系(1)及(2)可以互逆，即(1)$\Longleftrightarrow$(2). 为了证明(1)$\Longrightarrow$(2)，即当(1)给定时，$g(n)$可由(2)给出，我们把(1)代入(2)的右端，并利用命题 42，即得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left\{\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s g(s)\right\}$$

$$=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}g(s)\left\{\sum_{k=s}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{s}\right\}$$

$$=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}g(s)\delta_{s,n}(-1)^{n}=g(n),$$

式中 $\delta_{s,n}=0(s\neq n),\delta_{n,n}=1$. 所以(2)的右端的确表出 $g(n)$. 又因为方程(1)及(2)在形式上是完全相同的,故由(2)亦可推出(1). 即(1)及(2)在本质上是完全等同的.

49. 试证 $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{n}$.

[证] 可应用命题 48. 为此, 定义 $f(0)=g(0)=0$, $g(k)=-\frac{1}{k}$. 于是由命题 43 可知

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}g(k)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=f(n)\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

因此根据命题 48 中(2)即得

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=g(n)=-\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

50. 试证 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m+k}{\nu}(-1)^{k}=(-1)^{n}\binom{m}{\nu-n}$.

[提示] 利用命题 34 和48.

51. 试证 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m+k}{m}^{-1}\frac{(-1)^{k}}{m+k+1}=\frac{1}{m+n+1}$.

[提示] 利用命题 46 和 48.

52. 设

$$\phi(n)=a_0+a_1\cdot n+a_2\cdot n(n-1)+a_3\cdot n(n-1)(n-2)+\cdots,$$

$$\psi(n)=a_0+\frac{a_1}{2}n+\frac{a_2}{2^2}n(n-1)+\frac{a_3}{2^3}n(n-1)(n-2)+\cdots$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots).$$

则必有

$$\binom{n}{0}\phi(0)+\binom{n}{1}\phi(1)+\binom{n}{2}\phi(2)+\cdots+\binom{n}{n}\phi(n)=2^n\psi(n),$$

$$\binom{n}{0}\phi(0)-\binom{n}{1}\phi(1)+\binom{n}{2}\phi(2)-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}\phi(n)=(-1)^n a_n\cdot n!$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots).$$

［证］ 将 $\phi(n)$ 的定义代入第一式的左端并利用命题 41 得

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\phi(\nu)&=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}a_\mu\cdot\mu!\binom{\nu}{\mu}\\&=\sum_{\mu=0}^{n}a_\mu\cdot\mu!\sum_{\nu=\mu}^{n}\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{\mu}\\&=\sum_{\mu=0}^{n}a_\mu\cdot\mu!2^{n-\mu}\binom{n}{\mu}\\&=2^n\sum_{\mu=0}^{n}\frac{a_\mu}{2^\mu}n(n-1)\cdots(n-\mu+1)\\&=2^n\psi(n).\end{aligned}$$

故第一式已成立．又将 $\phi(n)$ 的定义式写成

$$\phi(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k[(-1)^k\cdot k!a_k]$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots),$$

应用命题 48 即得本命题的第二式．

53. 试证$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n=n!$. (Euler)

［证］ 于命题 52 的第二式取 $\phi(k)=k^n$, 显然 $a_n=1$, 由是即得本命题.

54. 试证下列等式:

(i) $$\binom{n}{0}(0-n)^2+\binom{n}{1}(2-n)^2+\binom{n}{2}(4-n)^2+\cdots+\binom{n}{k}(2k-n)^2+\cdots=2^n\cdot n.$$

(ii) $$\binom{n}{0}(0-n)^2-\binom{n}{1}(2-n)^2+\binom{n}{2}(4-n)^2-\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}(2k-n)^2+\cdots=\begin{cases}0 & (n\neq 2),\\ 8 & (n=2).\end{cases}$$

［证］ 固定 n, 于命题 52 取 $\phi(k)=(2k-n)^2$. 则显然

$$\phi(k)=n^2-4(n-1)k+4k(k-1),$$

$$\psi(k)=n^2-2(n-1)k+k(k-1).$$

从而

$$a_n=\begin{cases}0 & (n\neq 2),\\ 4 & (n=2).\end{cases}\quad \psi(n)=n.$$

由是由命题 52 的两个等式即得本命题的两个等式.

55. 设以 n 册各不相同的书分赠给 k 个朋友($n\geqslant k$), 使每个人至少得一册. 试证其分配方式的总数 S_k^n 由下式给出:

$$S_k^n=k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^2-\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\cdot 1^n.$$

［证］ 注意本题与 §1 的例题 6 是具有不同性质的. 在分配的办法中, 若取消"每人至少得书一册"的限制, 则分配方式的总数显然是 k^n. 现从另一途径剖析此总数之构成. 从 k 个朋友中任选

ν 个，选法数是$\binom{k}{\nu}$. 把 n 册书分给这 ν 个人，使每人至少得书一册，按定义分法数是 S_ν^n. 故 k 个人中正好有 ν 个得书之分配方式数为$\binom{k}{\nu}S_\nu^n$. 所以

$$k^n=\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}S_\nu^n.$$

把上式写成 $k^n=\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}(-1)^\nu[(-1)^\nu S_\nu^n]$，应用命题 48 的互逆公式便得出

$$S_k^n=\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}(-1)^{k-\nu}\nu^n.$$

56. 试证下列李善兰(1811—1882)恒等式:

$$\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\binom{n+k+l-j}{k+l}=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}.$$

[证] 记上式左端的和为 S. 利用命题 34 作工具，我们有

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\sum_{\nu\geq j}\binom{n+k}{\nu+k}\binom{l-j}{l-\nu}\\
&=\sum_{\nu\geq 0}\binom{n+k}{\nu+k}\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\binom{l-j}{l-\nu}\\
&=\sum_{\nu\geq 0}\binom{n+k}{\nu+k}\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{\nu}\binom{\nu}{\nu-j}\\
&=\sum_{\nu\geq 0}\binom{n+k}{\nu+k}\binom{l}{\nu}\binom{k+\nu}{\nu}=\sum_{\nu\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{\nu}\binom{l}{l-\nu}\\
&=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}.
\end{aligned}$$

57. 设 z 为任意实数或复数，则

$$\sum_{j\geqslant 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\binom{z+k+l-j}{k+l}=\binom{z+k}{k}\binom{z+l}{l}.\quad(李善兰)$$

［证］ 注意命题56中的等式两端都是整变数n的$k+l$次代数多项式，因而当n被换成z时依然成立。这种推理原则，在命题35的另一证明中已经用到，可简称之为“多项式恒等原理”。

58. 设x, y为任意实数或复数．则

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{x}{j}\binom{y}{j}\binom{x+y+n-j}{n-j}=\binom{x+n}{n}\binom{y+n}{n}.\quad(李善兰)$$

59. 设n, r为任意正整数，其和为一偶数$n+r=2m(n>r)$．则

$$\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^{k}\binom{n-r}{k}\binom{2m+k}{n}2^{-k}$$
$$=(-1)^{\frac{n-r}{2}}2^{r-n}\binom{n}{m}\binom{2m}{n}\binom{n}{r}^{-1}$$

60. 设$k=\left[\frac{n-1}{2}\right]$表$\frac{n-1}{2}$的整数部分．试证

$$\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{(n-1)!(n-2i)}{(n-i)!i!}\right)^{2}=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

61. 试证下列等式并说明其两端均为整数：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\frac{k^{n+4}}{k!(n-k)!}$$
$$=\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{6!8}(15n^{3}+10n^{2}+5n-2).$$

［证］ 比较下列两展开式中x^{4}的系数f_{4}：

$$\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^{n}=x^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}e^{-kx}$$
$$=x^{-n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{k+\nu}\binom{n}{k}\frac{k^{\nu}x^{\nu}}{\nu!}.$$

$$\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^n=\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j x^j}{(j+1)!}\right)^n$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j x^j}{(j+1)!}\right)$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\binom{n}{i}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_i=m\\ j_1,\cdots,j_i\geqslant 1}}\frac{(-1)^m}{(j_1+1)!\cdots(j_i+1)!}x^m,$$

我们得到

$$f_4=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+n+4}\binom{n}{k}\frac{k^{n+4}}{(n+4)!}$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\binom{n}{i}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_i=4\\ j_1,\cdots,j_i\geqslant 1}}\frac{1}{(j_1+1)!\cdots(j_i+1)!}$$

$$=\binom{n}{1}\frac{1}{5!}+\binom{n}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4!\cdot 2!}+\frac{1}{3!3!}+\frac{1}{2!4!}\right)$$

$$+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{3!2!2!}+\frac{1}{2!3!2!}+\frac{1}{2!3!3!}\right)$$

$$+\binom{n}{4}\frac{1}{2!2!2!2!}.$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\frac{k^{n+4}}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{(n+4)!}{n!}f_4$$

$$=\binom{n+4}{5}+\binom{n+4}{6}3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{36}\right)$$

$$+\binom{n+4}{7}\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{8}+\binom{n+4}{8}\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{16}$$

$$=\binom{n+4}{5}+25\binom{n+4}{6}+105\binom{n+4}{7}+105\binom{n+4}{8}$$

是一个整数,并且容易化到题文中等式右端的形式.

62. 若多项式 $f(x)$当 $x=0,1,2,\cdots$时恒取整数值,则称 $f(x)$为一整值多项式. 试证 $f(x)$ 为一 n 次整值多项式的必要与充分条件为:有一组整数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 存在,使

$$f(x)=a_0\binom{x}{0}+a_1\binom{x}{1}+\cdots+a_n\binom{x}{n}.$$

§3. 差分算子△的简单应用

设 $f(x)$表任一实变数或复变数的函数, Δ 为一差分算子, 其定义为 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$, $\Delta[\Delta^k f(x)]=\Delta^{k+1}f(x)$. 以算子 Δ 作成的多项式

$$P(\Delta)=p_0+p_1\Delta+p_2\Delta^2+\cdots+p_n\Delta^n$$

仍得视为一算子,其系数 p_i 属于实数域或复数域,并规定

$$P(\Delta)f(x)=p_0f(x)+p_1\Delta f(x)+p_2\Delta^2f(x)+\cdots+p_n\Delta^nf(x).$$

又规定 I 与 0 分别为单位算子与零算子,其定义为

$$If(x)=\Delta^0f(x)=f(x),\ 0f(x)=0,\ \Delta^k+0=0+\Delta^k=\Delta^k.$$

这样我们便很容易看出: 系数属于实数域或复数域的一切差分算子多项式 $\{P(\Delta)\}$ 对于上述规定的加法及乘法而言, 作成一个交换环. 例如,若 $Q(\Delta)$为另一差分算子多项式, 则显然 $P(\Delta)[Q(\Delta)f(x)]=[P(\Delta)Q(\Delta)]f(x)=Q(\Delta)[P(\Delta)f(x)]$.

另一个常用的算子是移位算子 E,其定义为

$$Ef(x)=f(x+1),\ E^k=E^{k-1}E,\ E^0=I.$$

63. 设 x 为整数并且 $0\leqslant x\leqslant n$. 试证

$$f(x)=f(0)+\binom{x}{1}\Delta f(0)+\binom{x}{2}\Delta^2 f(0)+\cdots$$

$$+\binom{x}{n}\Delta^n f(0). \qquad \text{(Newton)}$$

［证］ $f(x)=E^x f(0)=(I+\Delta)^x f(0)$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{x}\binom{x}{k}\Delta^k\right\}f(0)=\sum_{k=0}^{x}\binom{x}{k}\Delta^k f(0).$$

64. （牛顿-格雷戈里的插值公式）试证对任意 x，有

$$f(x)=f(0)+\binom{x}{1}\Delta f(0)+\binom{x}{2}\Delta^2 f(0)+\cdots$$

$$+\binom{x}{n}\Delta^n f(0)+R_n(x),$$

此地余项 $R_n(x)$ 由下式决定：

$$R_n(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & f(0) \\ 1 & 1^1 & \cdots & 1^n & f(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n^1 & \cdots & n^n & f(n) \\ 1 & x^1 & \cdots & x^n & f(x) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1^1 & 1^2 & \cdots & 1^n \\ 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^1 & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

（牛顿，I. Newton，1643—1727；格雷戈里，J. Gregory，1638—1675.）

［证］ 倘将上述余项表达式的分子按最末一行展开，可知 $R_n(x)$ 可表示成 $f(x)-p_n(x)$，这里 $p_n(x)$ 是一次数 $\leqslant n$ 的多项式. 另一方面，$q_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\Delta^k f(0)$ 显然也是次数 $\leqslant n$ 的多项式，因此只要证明 $q_n(x)$ 在 $n+1$ 个相异的点处与 $p_n(x)=f(x)-R_n(x)$ 取相同的值即可. 由上题的结论可知当 $x=0, 1, \cdots, n$ 时 $q_n(x)=$

$f(x)$, 由 $R_n(x)$ 的表达式可知当 $x=0, 1, \cdots, n$ 时 $R_n(x)=0$, 从而 $p_n(x)=f(x)$. 所以在 $x=0, 1, \cdots, n$ 这 $n+1$ 个点处 $p_n(x)=q_n(x)$.

65. 设 $f(x)$为一 k 次多项式, 则

$$f(x)=f(0)+\binom{x}{1}\Delta f(0)+\binom{x}{2}\Delta^2 f(0)+\cdots+\binom{x}{k}\Delta^k f(0).$$

[证] 上题中, $R_k(x)$ 的分子行列式的最后一列是其余各列的线性组合, 从而 $R_k(x)=0$.

66. 试证

$$\Delta^n f(0)=f(n)-\binom{n}{1}f(n-1)+\binom{n}{2}f(n-2)-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}f(0).$$

[提示] 注意 $\Delta^k=(E-I)^k$.

67. 试由命题 66 推证命题 53 的欧拉等式.

68. 试应用差分算子及移位算子推证命题 52 的第二式.

69. 若定义 $\Delta^{-1}f(x)=\sum_{t=0}^{x-1}f(t)$, $\Delta^{-k}=\Delta^{-1}\Delta^{-(k-1)}$. 试证下列等式对一切小于或等于 n 的正或负的整数 k 而言恒成立:

$$\Delta^k\binom{x}{n}=\Delta\Delta^{k-1}\binom{x}{n}=\binom{x}{n-k}.$$

70. 设 $f(x)$为一k 次多项式, k 次项系数为 a_0. 试证

$$\Delta^k f(x)=k!a_0, \Delta^s f(x)=0 (s\geqslant k+1).$$

71. 设 $f(x)$为一k 次多项式. 则

$$f(x)=f(-1)+\binom{x+1}{1}\Delta f(-2)+\binom{x+2}{2}\Delta^2 f(-3)+\cdots$$

$$+\binom{x+k}{k}\Delta^k f(-k-1).$$

［证］ 由于等式两端均为k次多项式，所以只要对非负整数n证明

$$f(n)=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n+\nu}{\nu}\Delta^\nu f(-\nu-1)$$

就够了．为此，我们留意$\Delta^n f(x)=0(n=k+1,k+2,\cdots)$，从而不难验算

$$(I-E^{-1}\Delta)^{n+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n+\nu}{\nu}(E^{-1}\Delta)^\nu\right\}f(x)=f(x).$$

由是可写

$$(I-E^{-1}\Delta)^{-n-1}f(x)=\left\{\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n+\nu}{\nu}(E^{-1}\Delta)^\nu\right\}f(x).$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n+\nu}{\nu}\Delta^\nu f(-\nu-1)&=E^{-1}\left\{\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n+\nu}{\nu}(E^{-1}\Delta)^\nu f(0)\right\}\\&=E^{-1}(I-E^{-1}\Delta)^{-n-1}f(0)=E^{-1}E^{n+1}(E-\Delta)^{-n-1}f(0)\\&=E^nI^{-n-1}f(0)=f(n).\end{aligned}$$

72. 设m为非负整数．试证下列互逆公式：

$$f(n)=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}g(k)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\Longleftrightarrow\Delta^n f(0)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}g(k+n)\quad(n=0,1,2\cdots).$$

［证］ 第一组等式关系可表成

$$f(n)=\left\{\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}E^k\right\}g(0)=(I+E)^{m+n}g(0)\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{1}$$

第二组等式关系可表成

$$\Delta^n f(0)=\left\{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}E^{k+n}\right\}g(0)=(I+E)^m E^n g(0)$$
$$=(-1)^n(I+E)^m\{I-(I+E)\}^n g(0)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\{(I+E)^{m+k}g(0)\}$$
$$(n=0,1,2,\cdots). \tag{2}$$

今应用命题 48 于(2),得

$$(I+E)^{m+n}g(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\{(-1)^k\Delta^k f(0)\}$$
$$=(I+\Delta)^n f(0)=E^n f(0)=f(n).$$

是为(1). 反之,若以(1)代入(2)的右端,则得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k)=\Delta^n f(0),$$

乃知由(1)亦可导出(2).

[注意] 若令 $m=0$,则命题 72 即是命题 48.

73. 试根据命题 63 与命题 66 的互逆性质推导命题 48.

[提示] 可将 $\Delta^k f(0)$ 作为函数 $g(k)$ 来看.

74. (伯努利求和公式) 设 $f(x)$ 为任一对 $x=1,2,\cdots,n$ 有定义的函数. 则

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\binom{n}{1}f(1)+\binom{n}{2}\Delta f(1)+\binom{n}{3}\Delta^2 f(1)+\cdots$$
$$+\binom{n}{n}\Delta^{n-1}f(1).$$

[提示] 可应用命题 63 来证. 又直接推证亦属易事.

75. 试证下列恒等式:

$$x+x^2+x^3+\cdots+x^n$$
$$=nx+\binom{n}{2}x(x-1)+\binom{n}{3}x(x-1)^2+\cdots+x(x-1)^{n-1}.$$

76. 试应用伯努利求和公式推出

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \binom{n}{1} + 15\binom{n}{2} + 50\binom{n}{3} + 60\binom{n}{4} + 24\binom{n}{5}.$$

［解］ 令 $f(k)=k^4$, 则容易求出 $\Delta f(1)=15$, $\Delta^2 f(1)=50$, $\Delta^3 f(1)=60$, $\Delta^4 f(1)=24$.

又,计算这些高阶差分的最简便的方式是这样的:

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(1) & & f(2) & & f(3) & & f(4) & & f(5) \\
1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 \\
& 15 & & 65 & & 175 & & 369 & \\
& & 50 & & 110 & & 194 & & \\
& & & 60 & & 84 & & & \\
& & & & 24 & & & &
\end{array}$$

我们所需要的数值也就是左边的斜行: 1, 15, 50, 60, 24.

77. 试证

$$\frac{7\sum_{k=1}^{n} k^6 + 5(p+1)\sum_{k=1}^{n} k^4 + p\sum_{k=1}^{n} k^2}{7\sum_{k=1}^{n} k^6 - 5(p-1)\sum_{k=1}^{n} k^4 - p\sum_{k=1}^{n} k^2} = \frac{n^2+n+p}{n^2+n-p}.$$

78. 设数列 $\left\{s_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛于零. 则下列数列也收敛于零:

$$t_n = \frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}s_\nu \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

［证］ 对任意 $m \leqslant n$, 写 $\varepsilon_m = \sup\{s_m, s_{m+1}, \cdots\}$. 则

$$|t_n| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2^n}\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{n}{\nu} + \frac{\varepsilon_m}{2^n}\sum_{\nu=m}^{n}\binom{n}{\nu} \leqslant \varepsilon_0 \frac{m \cdot n^{m-1}}{2^n} + \varepsilon_m.$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |t_n| \leqslant \varepsilon_m.$$

令 $m\to\infty$. 由于 s_n 收敛于零，从而 $\varepsilon_m\to 0(m\to\infty)$，所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|t_n|=0 \quad \text{即} \lim_{n\to\infty} t_n=0.$$

79. (欧拉转换公式) 设级数 $\Sigma(-1)^{n-1}f(n)$ 收敛 (不必为交错级数). 则对任意非负整数 p，有

$$\begin{aligned}
&f(1)-f(2)+f(3)-\cdots\\
=&\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2^2}\Delta f(1)+\cdots+\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\Delta^p f(1)\\
&+\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\{\Delta^{p+1}f(1)-\Delta^{p+1}f(2)\\
&+\Delta^{p+1}f(3)-\cdots\}\\
=&\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2^2}\Delta f(1)+\frac{1}{2^3}\Delta^2 f(1)-\cdots+\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\Delta^k f(1)+\cdots.
\end{aligned}$$

[证] 第一个等式可对 p 用完全归纳法来证明. 而欲从第一个等式导出第二个等式，只要证明含花括号的整个项当 $p\to\infty$ 时趋于零. 为此，以

$$\Delta^{p+1}f(k)=\sum_{\nu=0}^{p+1}\binom{p+1}{\nu}(-1)^{p+1-\nu}f(k+\nu)$$

(见命题 66)代入得

$$\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{p+k}\Delta^{p+1}f(k)=\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{\nu=0}^{p+1}\binom{p+1}{\nu}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}(-1)^{\mu+1}f(\mu).$$

但其中的 $s_\nu=\sum\limits_{\mu=\nu+1}^{\infty}(-1)^{\mu+1}f(\mu)$ 是给定的收敛级数的余项，从而当 $\nu\to\infty$ 时趋于零，由是根据命题 78 可知

$$\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{\nu=0}^{p+1}\binom{p+1}{\nu}s_\nu\to 0 \quad (p\to\infty).$$

[注意] 利用本命题有时能使收敛较慢的级数变为收敛较快的级数. 下面的题 80 提供了两个很典型的例子. 但题 81 提供的

例子说明亦不尽然如此. 题 82 给出了使收敛变好的一个充分条件.

80. 试将级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots,\ \ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$$

转换成收敛较快的级数.

[提示] 例如就第一个级数而言, 可令 $f(n)=1/(2n-1)$, 于是

$$\Delta^k f(1)=(-1)^k 2^k\frac{k!}{(2k+1)!!}\qquad (k=1,2,3,\cdots).$$

代入命题 79 的第二个等式得

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots.$$

同样地, 对第二个级数得

$$\ln 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots.$$

81. 试将欧拉转换公式应用于级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}$, 说明转换后的级数收敛反而变慢.

[提示] 转换以后的级数为 $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

82. 若收敛级数 $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$ 满足下列条件:

(i) $(-1)^k\Delta^k f(n)>0\quad (k=0,1,2,\cdots;n=1,2,3,\cdots)$;

(ii) 存在实数 $a>\frac{1}{2}$, 使对一切 n 有

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}\geqslant a,$$

则经欧拉转换后的级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\Delta^k f(1)$收敛比原来的级数为快，即写

$$R_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}f(\nu),\qquad r_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2^{\nu+1}}\Delta^{\nu}f(1)$$

时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{R_n}=0.$$

［证］ 由条件(i)得

$$(-1)^k\Delta^k f(n)=(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}f(n)-(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}f(n+1)$$
$$<(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}f(n)<\cdots<f(n).$$

因此

$$r_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2^{\nu+1}}\Delta^{\nu}f(1)\leqslant\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{f(1)}{2^{\nu+1}}=\frac{f(1)}{2^{n+1}}.$$

另一方面，

$$R_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}f(\nu)$$
$$=\frac{(-1)^n}{2}\left(f(n+1)+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\Delta f(n+1+\nu)\right).$$

因为$-\Delta f(n)>0$，所以上式右边的级数是交错级数．又因为

$$\Delta^2 f(n)>0,$$

所以它的通项的绝对值单调下降地趋于零．因此由条件(ii)得

$$|R_n|>\frac{f(n+1)}{2}\geqslant\frac{1}{2}f(1)\cdot a^n.$$

于是

$$\left|\frac{r_n}{R_n}\right|\leqslant\frac{1}{(2a)^n},\text{ 从而 }\lim_{n\to\infty}\left|\frac{r_n}{R_n}\right|=0.$$

§4. 欧拉-马克劳林求和公式

有限和 $\Sigma f(n)$的求法是解析运算感兴趣的问题之一．诚如上节命题 69 的定义所指出的，这种运算是差分运算的逆运算．上节的伯努利求和公式(命题 74)已经涉及到和 $\Sigma f(n)$ 的求法的问题．这个公式对于 $f(n)$是多项式的情形(即 $\Sigma f(n)$ 是所谓高阶等差级数的情形）使用起来颇称方便．但对一般的解析函数，则问题仍然是没有解决的．为此，本节将介绍一种古典的求和技巧，这就是欧拉-马克劳林求和公式．这个公式是欧拉在 1738 年发表的，但近代分析的研究发展却更加显示出这个公式的重要性．

83. 由下列发生函数定义的一些数 B_ν 称为伯努利数：

$$G(x)=\frac{x}{e^x-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}x^\nu.$$

试证

(i) $B_0=1, B_k=-\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{k!}{\nu!(k-\nu+1)!}B_\nu \quad (k=1,2,\cdots).$

(ii) $B_1=-\frac{1}{2}, B_{2k+1}=0 \quad (k=1,2\cdots).$

[证] 首先我们注意，函数$(e^x-1)/x$(当 $x=0$ 时定义函数值为 1) 幂级数展开式的常数项不是零，因此 $G(x)$的幂级数有一个正的收敛半径，上述定义是有意义的．由定义，

$$1=\frac{e^x-1}{x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}x^\nu=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}x^\nu$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{B_\nu}{\nu!(k-\nu+1)!}x^k.$$

比较系数即得(i)．又

$$G(-x)=\frac{-x}{e^{-x}-1}=\frac{-xe^x}{1-e^x}=\frac{xe^x-x+x}{e^x-1}=x+G(x).$$

即

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}(-x)^\nu=x+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}x^\nu.$$

由是即得(ii).

84. 试将函数 $x\ \mathrm{ctg}\ x$ 和 $\mathrm{tg}\ x$ 展成幂级数.

[解] $$\mathrm{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}=i\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}=i\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}=i+\frac{2i}{e^{2ix}-1}.$$

因此

$$x\ \mathrm{ctg}\ x=ix+\frac{2ix}{e^{2ix}-1}.$$

由是根据伯努利数的定义得

$$x\,\mathrm{ctg}x=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}.$$

又根据 $\mathrm{tg}x=\mathrm{ctg}x-2\mathrm{ctg}2x$ 得

$$\mathrm{tg}x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1}.$$

85. 设 n 和 k 都是正整数. 试证

$$\begin{aligned}&1^k+2^k+\cdots+n^k\\&=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{1}{2}n^k+\frac{B_2}{2!}kn^{k-1}+\frac{B_4}{4!}k(k-1)(k-2)n^{k-3}\\&\quad+\frac{B_6}{6!}k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)n^{k-5}+\cdots.\end{aligned}$$

(Bernoulli)

[提示] 由上节命题74和70可知 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 是 n 的 $k+1$ 次多项式, 设为 $P(n)=A_0n^{k+1}+A_1n^k+\cdots+A_k\cdot n+A_{k+1}$. 试比较 $P(n+1)-P(n)=(n+1)^k$ 的系数.

86. 试求 $B_2, B_4, B_6, B_8, B_{10}$.

[答] $B_2=\frac{1}{6}, B_4=-\frac{1}{30}, B_6=\frac{1}{42}, B_8=-\frac{1}{30}, B_{10}=\frac{5}{66}$.

87. 伯努利多项式 $B_k(t)$由下列生成函数定义:

$$H(t,x)=e^{tx}\frac{x}{e^x-1}=e^{tx}G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(t)}{k!}x^k.$$

试证 $B_k(t)=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}B_\nu t^{k-\nu}$.

[证] 由定义

$$\left(1+\frac{tx}{1!}+\frac{t^2x^2}{2!}+\cdots\right)\left(B_0+\frac{B_1}{1!}t+\frac{B_2}{2!}t^2+\cdots\right)$$

$$=B_0(t)+\frac{B_1(t)}{1!}x+\frac{B_2(t)}{2!}x^2+\cdots,$$

比较两端 x^k 项的系数即得.

[注意] 由本命题显然可见 $B_k=B_k(0)$, 即伯努利数是伯努利多项式在 $t=0$ 的值.

88. 伯努利多项式满足下列等式:

$$B_0(t)=1,\ B'_k(t)=kB_{k-1}(t)\quad(k=1,2,\cdots),$$

$$\int_0^1 B_k(t)dt=0\quad(k=1,2,\cdots).$$

反之,伯努利多项式由上述条件唯一确定.

[证] $B_0(t)=1$ 及 $B'_k(t)=kB_{k-1}(t)$ 由命题 87 的结果直接验证. 又同样算出

$$\int_0^1 B_k(t)dt=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\frac{B_\nu}{k-\nu+1},$$

由命题 83 的(i)可知其为零.

反之,如果从 $B_0(t)=1$ 出发逐次积分,并由

$$\int_0^1 B_k(t)dt=0$$

决定积分常数, 我们就能唯一确定一系列多项式 $B_k(x)$, 显然这

就是伯努利多项式.

89. 试证伯努利多项式有下列性质:

(i) $B_k^{(k-1)}(1)-B_k^{(k-1)}(0)=k!\quad(k=1,2,\cdots)$.

(ii) $B_k^{(\nu)}(1)=B_k^{(\nu)}(0)=\dfrac{k!}{(k-\nu)!}B_{k-\nu}$

$$(k=2,3,\cdots;\nu=0,1,\cdots,k-2,k).$$

(iii) $B_k(t+1)=B_k(t)+kt^{k-1}\quad(k=1,2,\cdots)$.

[证] (i)和(ii)可利用命题 88 的结果来证明. 为证明(iii)我们可得 $B_k(t+1)$作泰勒(B. Taylor, 1685—1731)展开, 并利用(ii)推导如下:

$$\begin{aligned}B_k(t+1)&=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{B_k^{(\nu)}(1)}{\nu!}t^\nu=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{B_k^{(\nu)}(0)}{\nu!}t^\nu\\&\quad+\sum_{\nu=0}^{k}\frac{B_k^{(\nu)}(1)-B_k^{(\nu)}(0)}{\nu!}t^\nu\\&=B_k(t)+kt^{k-1}.\end{aligned}$$

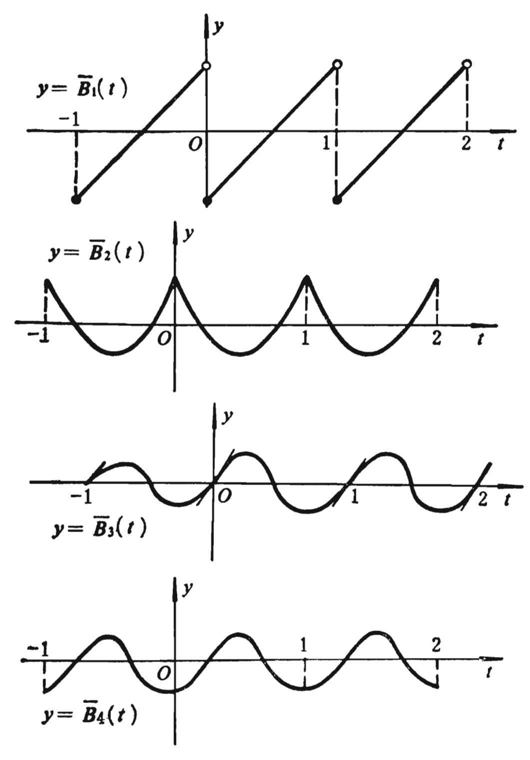
90. 设 n 和 k 都是正整数. 试证

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(n+1)-B_{k+1}).$$

[提示] 利用命题 89 的(iii).

[注意] 本题的结果与命题 85 是一回事. 但这里利用了伯努利多项式,不仅表达紧凑,而且证明大为简化.

91. 对任意实数 t,设以$[t]$表不超过 t 的最大整数,并令$\{t\}=t-[t]$. 则 $\bar{B}_k(t)=B_k(\{t\})$是以 1 为周期的周期函数,称为伯努利函数. 试绘制伯努利函数 $\bar{B}_1(t)$, $\bar{B}_2(t)$, $\bar{B}_3(t)$, $\bar{B}_4(t)$的图形. 证明所有的伯努利函数都有有界变差, 且当 $k\geqslant 2$ 时是连续的. 研究其可微性,关于各阶导数做出相应的结论.



题 91 图　伯努利函数 $\overline{B}_1(t)$, $\overline{B}_2(t)$, $\overline{B}_3(t)$, $\overline{B}_4(t)$的图形.

92. 带奇下标的伯努利函数是奇函数，带偶下标的伯努利函数是偶函数.

［证］ 由

$$e^{(1-t)x}\frac{x}{e^x-1}=e^{-tx}\frac{xe^x}{e^x-1}=e^{-tx}\frac{-x}{e^{-x}-1}$$

可见

$$H(1-t,x)=H(t,-x).$$

即
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(1-t)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(t)}{k!}(-x)^k.$$

所以 $$B_k(1-t)=(-1)^k B_k(t).$$
这也就是 $$\bar{B}_k(-t)=(-1)^k \bar{B}_k(t).$$

93. 在任一个周期区间上，下标不小于2的伯努利函数正好有两个零点. 具体地说，当 $k\geqslant 1$ 时 $\bar{B}_{2k+1}(t)$ 在$[0,1)$上的零点*)是 $0,\frac{1}{2}$，$\bar{B}_{2k}(t)$ 在 $[0,1)$ 上的零点是在区间内部关于$\frac{1}{2}$对称的一对点.

［证］ 当 $k\geqslant 1$ 时，$0,\frac{1}{2}$，1 分别是贝努利多项式 $B_{2k+1}(t)$ 的零点. 如果 $B_{2k+1}(t)$在$(0,1)$尚有除$\frac{1}{2}$外的别的零点，则由

$$B''_{2k+1}(t)=2k\cdot(2k+1)B_{2k-1}(t)$$

根据洛尔(M. Rolle, 1652—1719) 定理可知 $B_3(t)$在$(0,1)$尚有两个零点，这样便导致三次多项式 $B_3(t)$ 有四个零点之矛盾. 同样可知 $B_{2k}(t)$在$[0,1]$ 恰有两个零点在区间内部. 零点关于$\frac{1}{2}$的对称性由命题 92 可知.

94. 设 k 和 n 都是自然数，又设 $0\leqslant t<n$. 则

$$\bar{B}_k(t)=B_k(t)-k\sum_{\nu=1}^{n-1}(t-\nu)_+^{k-1},$$

式中

$$(t-\nu)_+^{k-1}=\begin{cases}(t-\nu)^{k-1} & (t\geqslant\nu),\\ 0 & (t<\nu).\end{cases}$$

又当 t 为负数时，试写出相应的结果.

［提示］ 由命题 89 的等式(iii)，有

$$B_k(t)=B_k(t-1)+k(t-1)^{k-1}=\cdots$$
$$=B_k(t-[t])+k(t-1)^{k-1}+\cdots+k(t-[t])^{k-1}.$$

95. 设 t 是任意实数，k 为任意正整数. 则

---

*）命 $0^0=1$.

$$\bar{B}_0(t)=1.$$

$$\bar{B}_1(t)=-\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\nu t}{\nu}\quad (t\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

$$\bar{B}_{2k}(t)=(-1)^{k+1}2\,\frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\nu t}{\nu^{2k}}.$$

$$\bar{B}_{2k+1}(t)=(-1)^{k+1}2\,\frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\nu t}{\nu^{2k+1}}.$$

[证] 以 $a_n^{(k)}, b_n^{(k)}$ 表 $\bar{B}_k(t)$ 的傅里叶系数. 则当 $k\geqslant 1$ 时

$$a_0^{(k)}=2\int_0^1 B_k(x)=0;$$

$$a_n^{(2k)}=2\int_0^1\bar{B}_{2k}(t)\cos 2\pi nt\,dt$$

$$=2\left[\frac{\sin 2\pi nt}{2\pi n}B_{2k}(t)\right]_0^1-2\int_0^1\frac{\sin 2\pi nt}{2\pi n}2kB_{2k-1}(t)dt$$

$$=0+\frac{2k}{\pi n}\left[\frac{\cos 2\pi nt}{2\pi n}B_{2k-1}(t)\right]_0^1$$

$$-\frac{2k}{\pi n}\int_0^1\frac{\cos 2\pi nt}{2\pi n}(2k-1)B_{2k-2}(t)dt,$$

若 $k=1$, 则上式末端的积分为零, 因而

$$a_n^{(2)}=\frac{1}{\pi^2 n^2},$$

又若 $k>1$, 则积分另外的项为零, 因而

$$a_n^{(2k)}=-\frac{2k(2k-1)}{(2\pi n)^2}a_n^{(2k-2)}=\cdots=(-1)^{k-1}\frac{2\cdot(2k)!}{(2\pi n)^{2k}}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots);$$

而由命题 92 可知 $b_n^{(2k)}=0$. 由是我们得到 $\bar{B}_{2k}(t)$ 的傅里叶展开. 显然此展开式是收敛于 $\bar{B}_{2k}(t)$ 的.

同样可得 $\bar{B}_1(t)$ 和 $\bar{B}_{2k+1}(t)(k\geqslant 1)$ 的傅里叶展开式. 后者在全实轴处处收敛于 $\bar{B}_{2k+1}(t)$, 前者由狄利克雷-约当判别法可知

除整数点外都收敛于 $\bar{B}_1(t)$.

96. 试证

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}.$$

一般地, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}B_{2k}}{(2k)!}.$$

[提示] 这是上题展开式的特殊值.

97. (欧拉-马克劳林公式)设 $f(x)$定义于区间$[a,b]$, 对某个正整数 r, $f^{(r-1)}(x)$在$[a,b]$上绝对连续. 则对任意 $t\in[0,1]$, 有

$$\int_a^b f(x)dx=h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+(i+t)h)$$

$$-\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{f^{(\nu-1)}(b)-f^{(\nu-1)}(a)}{\nu!}B_\nu(t)h^\nu$$

$$+\frac{h^r}{r!}\int_a^b f^{(r)}(x)\left(\bar{B}_r\left(t-\frac{x-a}{h}\right)-B_r(t)\right)dx,$$

式中 n 是任意正整数, $h=\dfrac{b-a}{n}$.

[证] 上式右端是 t 的连续函数, 故不妨设 $0<t<1$. 写

$$\rho_r=\frac{h^r}{r!}\int_a^b f^{(r)}(x)\cdot\bar{B}_r\left(t-\frac{x-a}{h}\right)dx.$$

当 $r\geqslant 2$ 时利用分部积分法得

$$\rho_r=\frac{h^r}{r!}\left[f^{(r-1)}(x)\bar{B}_r\left(t-\frac{x-a}{h}\right)\right]_{x=a}^{x=b}$$

$$+\frac{h^{r-1}}{(r-1)!}\int_a^b f^{(r-1)}(x)\bar{B}_{r-1}\left(t-\frac{x-a}{h}\right)dx$$

$$=\frac{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)}{r!}B_r(t)h^r+\rho_{r-1}.$$

又

$$\rho_1=h\int_a^b f'(x)\overline{B}_1\left(t-\frac{x-a}{h}\right)dx$$

$$=h\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f'(x)\overline{B}_1\left(t-\frac{x-a}{h}\right)dx$$

$$=h^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^1 f'(a+(i+u)h)\overline{B}_1(t-u)\,du$$

$$=h^2\sum_{i=0}^{n-1}\Big\{\int_0^t f'(a+(i+u)h)B_1(t-u)\,du$$

$$+\int_t^1 f'(a+(i+u)h)B_1(t+1-u)\,du\Big\}$$

$$=h\sum_{i=0}^{n-1}\Big\{\Big[f(a+(i+u)h)B_1(t-u)\Big]_{u=0}^{u=t}$$

$$+\int_0^t f(a+(i+u)h)\,du$$

$$+\Big[f(a+(i+u)h)B_1(t+1-u)\Big]_{u=t}^{u=1}$$

$$+\int_t^1 f(a+(i+u)h)\,du\Big\}$$

$$=[f(b)-f(a)]B_1(t)h-h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+(i+t)h)$$

$$+\int_a^b f(x)dx.$$

所以

$$\rho_r=\sum_{\nu=1}^{r}\frac{f^{(\nu-1)}(b)-f^{(\nu-1)}(a)}{\nu!}B_\nu(t)h^\nu$$

$$-h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+(i+t)h)+\int_a^b f(x)dx.$$

但显然

$$\frac{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)}{r!}B_r(t)h^r=\frac{h^r}{r!}\int_a^b f^{(r)}(x)B_r(t)dx.$$

于是命题得证.

98. 设k和n都是正整数. 则对任意实数t,成立等式

$$B_k(nt)=n^{k-1}\sum_{i=0}^{n-1}B_k\left(t+\frac{i}{n}\right). \qquad \text{(Raabe)}$$

［证］ 于命题97置$f(x)=B_k(t+x)$, $a=0, b=1$, $r=k+1$,使得

$$\frac{B_{k+1}(t+1)-B_{k+1}(t)}{k+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}B_k\left(t+\frac{i}{n}\right)$$

$$-\sum_{\nu=1}^{k}k(k-1)\cdots(k-\nu+2)\frac{B_{k-\nu+1}(t+1)-B_{k-\nu+1}(t)}{\nu!}\cdot\frac{B_\nu}{n^\nu}.$$

于是由命题89的(iii)及命题87,相继得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}B_k\left(t+\frac{i}{n}\right)=t^k+\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}\frac{B_\nu}{n^\nu}t^{k-\nu}$$

$$=\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}B_\nu\cdot(nt)^{k-\nu}=\frac{1}{n^k}B_k(nt).$$

99. 设k为非负整数. 则有下列等式成立:

$$B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)=-(1-2^{1-2k})B_{2k}.$$

$$B_{2k}\left(\frac{1}{4}\right)=B_{2k}\left(\frac{3}{4}\right)=-(1-2^{1-2k})2^{-2k}B_{2k}.$$

$$B_{2k}\left(\frac{1}{3}\right)=B_{2k}\left(\frac{2}{3}\right)=-(1-3^{1-2k})2^{-1}B_{2k}.$$

$$B_{2k}\left(\frac{1}{6}\right)=B_{2k}\left(\frac{5}{6}\right)=(1-2^{1-2k})(1-3^{1-2k})2^{-1}B_{2k}.$$

［证］ 利用拉贝(J. L. Raabe, 1801—1859)的加法定理(命题98)即得.

［注意］ 本命题所给出的 $B_{2k}(t)$ 在 $t=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ 的特殊值是很有用处的. 此外，我们还顺便得到了 $B_{2k}(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的零点 t^* 的估计：$\frac{1}{6}<t^*<\frac{1}{4}$.

100. 设 $f^{(r-1)}(x)$ 在$[0,1]$上绝对连续,并且在$[0,1]$上几乎处处有 $|f^{(r)}(x)|\leqslant M$, 这里 M 是正的常数, r 为正整数. 则对任意 $t\in[0,1]$ 和正整数 n, 成立不等式

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{t+i}{n}\right)+\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{f^{(\nu-1)}(1)-f^{(\nu-1)}(0)}{\nu!n^\nu}B_\nu(t)\right|$$
$$\leqslant\frac{K_r(t)M}{n^r},$$

这里

$$K_r(t)=\frac{1}{r!}\int_0^1|B_r(x)-B_r(t)|dx.$$

在所有使上述不等式成立的与 f 无关的常数 $K_r(t)$ 中，这是最好可能的.

［证］ 记不等式左端绝对值号内的表达式为 $R_r(f,t)$. 则由命题 97, 有

$$R_r(f,t)=\frac{1}{r!n^r}\int_0^1 f^{(r)}(x)(\overline{B}_r(t-nx)-B_r(t))dx.$$

所以

$$\begin{aligned}|R_r(f,t)|&\leqslant\frac{M}{r!n^r}\int_0^1|\overline{B}_r(t-nx)-B_r(t)|dx\\&=\frac{M}{r!n^{r+1}}\int_{t-n}^t|\overline{B}_r(x)-B_r(t)|dx\\&=\frac{Mn}{r!n^{r+1}}\int_0^1|\overline{B}_r(x)-B_r(t)|dx=\frac{M}{n^r}K_r(t).\end{aligned}$$

另一方面,对任意满足条件

$$f^{(r)}\left(x+\frac{i}{n}\right)=M\ \text{sign}(\bar{B}_r(t-nx)-B_r(t))$$

$$\left(0<x<\frac{1}{n},\ i=0,1,\cdots,n-1\right)$$

的函数 $f(x)$，题中的不等式是等式. 所以常数 $K_r(t)$是最好可能的.

101. 设 p 为正整数. 则命题 **100** 中的常数 $K_r(t)$适合

$$K_{2p}(t)=\begin{cases}(-1)^{p+1}\left[4\dfrac{B_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}+(1-4t)\dfrac{B_{2p}(t)}{(2p)!}\right] & \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}\right),\\ (-1)^{p}\left[4\dfrac{B_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}+(3-4t)\dfrac{B_{2p}(t)}{(2p)!}\right] & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right).\end{cases}$$

［提示］ 函数 $\varphi(x)=B_{2p}(x)-B_{2p}(t)$在$[0,1]$上恰有两个零点 t 和$(1-t)$.

102. 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数，对某个正整数 r，$f^{(r-1)}(x)$绝对连续，且几乎处处有$|f^{(r)}(x)|\leqslant M$，这里M是正的常数. 则对任意实数 t 和正整数 n，成立不等式

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{t+i}{n}\right)\right|\leqslant\frac{\bar{K}_r(t)M}{n^r},$$

这里

$$\bar{K}_{2p-1}(t)=\bar{K}_{2p-1}=(-1)^{p+1}4(1-2^{-2p})\frac{B_{2p}}{(2p)!},$$

$$\bar{K}_{2p}(t)=\bar{K}_{2p}=(-1)^{p+1}4\frac{B_{2p+1}\left(\dfrac{1}{4}\right)}{(2p+1)!}.$$

并且，在所有使上述不等式成立的与 f 无关的常数 $\bar{K}_r(t)$中，这里的 $\bar{K}_r(t)$是最好可能的.

［证］ 不妨设 $0\leqslant t\leqslant 1$. 写不等式绝对值号内的表达式为 $\bar{R}_r(f,t)$，则 $\bar{R}_r(f,t)$其实与命题 100 证明中的 $R_r(f,t)$是相等的. 于是由命题 100 得

$$|\bar{R}_r(f,t)|\leqslant\frac{MK_r(t)}{n^r}.$$

但在命题的条件下，上式左端关于 f 取的上界应与 t 无关．因此右端中的 t 可以用任意值代入均使不等式成立．于是

$$|\bar{R}_{2p}(f,t)|\leqslant\frac{MK_{2p}\left(\frac{1}{4}\right)}{n^{2p}},\ |\bar{R}_{2p-1}(f,t)|\leqslant\frac{MK_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{n^{2p-1}}.$$

由命题 101 可知 $K_{2p}\left(\frac{1}{4}\right)=\bar{K}_{2p}$, 又由命题 100 中 $K_r(t)$的表达式直接算出 $K_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\bar{K}_{2p-1}$, 只要留意 $B_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

按照我们这样的取法取 t，则命题 100 的证明中构作的那个函数将适合

$$\int_0^1 f^{(r)}(x)dx=0.$$

于是对 $f^{(r)}(x)$进行 r 次不定积分后，我们可以适当选取其中的各个积分常数使之适合本命题的条件．但我们从命题 100 的证明中已经知道这个函数使不等式成为等式，所以命题给出的常数是最好可能的.

103. 设 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，$\int_0^{2\pi}f(x)dx=0$. 若对某个正整数 r, $f^{(r-1)}(x)$绝对连续, 且几乎处处有

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant 1.$$

则

$$\max_x|f(x)|\leqslant\bar{K}_r\cdot(2\pi)^r,$$

这里常数 $\bar{K}_r$ 即如命题 102 给出者, 且在此地是最好可能的.

(Бернштеин)

[提示]　这是命题 102 的特例.

104. 设 $f(x)$定义于区间$[a,b]$, 对某个正整数 r, $f^{(r-1)}(x)$是

有界变差的函数．则对任意 $t\in[0,1]$和正整数 n, 有

$$\int_a^b f(x)dx=h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+(i+t)h)$$
$$-\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{f^{(\nu-1)}(b)-f^{(\nu-1)}(a)}{\nu!}B_\nu(t)h^\nu$$
$$-\frac{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)}{r!}B_r^*(t)h^r$$
$$+\vartheta_r\frac{1}{r!}\|B_r^*\|h^r\bigvee_a^b(f^{(r-1)}),$$

这里 $h=\frac{b-a}{n}$, $\bigvee_a^b(f^{(r-1)})$表 $f^{(r-1)}$在$[a,b]$上的全变差，$|\vartheta_r|\leqslant 1$, $\|B_r^*\|$表函数 $B_r^*(t)$在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的最大绝对值,而

$$B_r^*(t)=\begin{cases}B_r(t) & (r\text{ 为奇数}),\\ B_r(t)-\frac{B_r}{2^r} & (r\text{ 为偶数}).\end{cases}$$

［证］ 不妨设 $0<t<1$．若 $r=1$，我们添设 $f(x)$至少在 $a+th, a+(t+1)h, \cdots, a+(t+n-1)h$ 诸点皆连续（这个假定如何去掉，这里不去讲它了，请按注 12 查找文献）．于是,下列积分是存在的:

$$\rho_r=\frac{h^r}{r!}\int_a^b\overline{B}_r\left(t-\frac{x-a}{h}\right)df^{(r-1)}(x).$$

对此,如同命题 97 的证明那样进行分部积分,只是以黎曼-斯提捷的分部积分原理代替勒贝格积分的分部积分原理,我们得到

$$\int_a^b f(x)dx=h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+(i+t)h)$$
$$-\sum_{\nu=1}^{r}\frac{f^{(\nu-1)}(b)-f^{(\nu-1)}(a)}{\nu!}B_\nu(t)h^\nu+\rho_r.$$

然后,我们将 ρ_r 写成

$$\rho_r=\frac{h^r}{r!}\int_a^b\left[\overline{B}_r\left(t-\frac{x-a}{h}\right)-c\right]df^{(r-1)}(x)$$
$$+c\frac{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)}{r!}h^r,$$

并取

$$c=\frac{1}{2}[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}B_r(t)+\min_{0\leqslant t\leqslant 1}B_r(t)],$$

即可证得命题.

[注意] $\|B_{2p}^*\|=\left(1-\frac{1}{2^{2p}}\right)|B_{2p}|$.

105. 设 $f'''(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续. 则

$$-\frac{1}{384}(b-a)^4\int_a^b\max(-f^{(4)}(x),0)dx$$
$$\leqslant\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))+$$
$$+\frac{1}{12}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))$$
$$\leqslant\frac{1}{384}(b-a)^4\int_a^b\max(f^{(4)}(x),0)dx. \qquad \text{(Atkinson)}$$

[提示] 这是命题 104 的特例. 请留意

$$\frac{1}{2}\left\{f'''(b)-f'''(a)+\bigvee_a^b(f''')\right\}=\int_a^b\max(f^{(4)}(x),0)dx,$$
$$\frac{1}{2}\left\{f'''(b)-f'''(a)-\bigvee_a^b(f''')\right\}$$
$$=-\int_a^b\max(-f^{(4)}(x),0)dx.$$

106. 设 $f'''(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续. 则

$$-\frac{1}{384}(b-a)^4\int_a^b\max(f^{(4)}(x),0)dx$$
$$\leqslant\int_a^b f(x)dx-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{24}(b-a)^2(f'(b)-f'(a))$$
$$\leqslant\frac{1}{384}(b-a)^4\int_a^b \max(-f^{(4)}(x),0)dx.$$

107. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调. 则随 $f'(x)$ 之为增或减，相应地有

$$\left.\begin{matrix}-\frac{h^2}{8}[f'(b)-f'(a)]\\ 0\end{matrix}\right\}$$
$$\leqslant\int_a^{a+nh}f(x)dx-h\Big[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\cdots$$
$$+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2}f(a+nh)\Big]$$
$$\leqslant\begin{cases}0\\ \frac{h^2}{8}[f'(a)-f'(b)].\end{cases}$$

［提示］ 这也是命题 104 的特例. 当 $f'(x)$ 为增的情形，这是鲍利亚(G. Pólya, 1887—)和薛戈(G. Szegö, 1895—) 的书上的一个习题. 当 $f'(x)$ 为减的情形，这是华罗庚和王元的一个定理.

108. (欧拉求和公式) 设 $f^{(2k-1)}(x)$ 在 $[a,a+nh]$ 上为有界变差函数，这里 k 是正整数. 则存在 ϑ_k, $|\vartheta_k|\leqslant1$, 使

$$\sum_{i=0}^{n}f(a+ih)=\frac{1}{h}\int_a^{a+nh}f(x)dx+\frac{f(a)+f(a+nh)}{2}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{k-1}h^{2\nu-1}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}[f^{(2\nu-1)}(a+nh)-f^{(2\nu-1)}(a)]$$
$$+h^{2k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(1-2^{-2k})\Big[f^{(2k-1)}(a+nh)-f^{(2k-1)}(a)$$
$$+\vartheta_k\bigvee_a^{a+nh}(f^{(2k-1)})\Big].$$

［证］ 于命题 104 置 $t=0$, $r=2k$ 即得.

109. 记

$$\sigma_k=\frac{1}{h}\int_a^{a+nh}f(x)dx+\frac{f(a)+f(a+nh)}{2}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k}h^{2\nu-1}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}[f^{(2\nu-1)}(a+nh)-f^{(2\nu-1)}(a)].$$

若对$[a,\ b]$上所有的x，都有$f^{(2k)}(x)\geqslant 0$并且$f^{(2k+2)}(x)\geqslant 0$，或对$[a,\ b]$上所有的x，都有$f^{(2k)}(x)\leqslant 0$并且$f^{(2k+2)}(x)\leqslant 0$．则和$\sum_{i=0}^{n}f(a+ih)$的值介于σ_k和σ_{k-1}之间．

［证］ 在本命题的条件下，由命题108可知

$$\sum_{i=0}^{n}f(a+ih)-\sigma_k \quad 与 \quad \sum_{i=0}^{n}f(a+ih)-\sigma_{k-1}$$

必异号．

110. 求和$\sum_{k=10}^{100}\frac{1}{k^3}$.

［解］ $f(x)=x^{-3}$适合命题109的条件．计算之，

$$\sigma_4=\int_{10}^{100}\frac{dx}{x^3}+\frac{0.001+0.000001}{2}+\frac{B_2}{2!}\left[\frac{3}{10^4}-\frac{3}{100^4}\right]$$

$$+\frac{B_4}{4!}\left[\frac{60}{10^6}-\frac{60}{100^6}\right]$$

$$=0.0054754142.$$

$$\sigma_6=0.0054754150.$$

由是可知

$$0.0054754142<\sum_{k=10}^{100}\frac{1}{k^3}<0.0054754150.$$

111.（奥斯特洛格拉茨基求和公式）设$f^{(2k-1)}(x)$在$[a,b]$上为有界变差函数，这里k为正整数．则存在ϑ_k，$|\vartheta_k|\leqslant 1$，使

$$\sum_{i=1}^{n} f\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]=\frac{1}{h}\int_{a}^{a+nh} f(x)dx$$

$$-\sum_{\nu=1}^{k-1} h^{2\nu-1}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}(1-2^{-2\nu+1})[f^{(2\nu-1)}(a+nh)$$

$$-f^{(2\nu-1)}(a)]$$

$$-h^{2k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(1-2^{-2k})\left[f^{(2k-1)}(a+nh)\right.$$

$$\left.-f^{(2k-1)}(a)+\vartheta_k \bigvee_{a}^{a+nh}(f^{(2k-1)})\right].$$

(奥斯特洛格拉茨基, M. B. Остроградский, 1801—1861.)

[证] 于命题 104 置 $t=\frac{1}{2}, r=2k$ 即得.

112. 试对命题 111 建立与命题 109 相应的结果.

113. 设 $f(x)$是$[-1,1]$上的有界变差函数. 试证高斯-切比晓夫(C. F. Gauss, 1777—1855; П. Л. Чебышев, 1821—1894)求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\cos\frac{2i+1}{2n}\pi\right)+E_n(f)$$

中的误差项满足不等式

$$|E_n(f)|\leqslant\frac{\pi}{2n}\bigvee_{-1}^{1}(f).$$

(崔锦泰)

[提示] 对函数 $f(\cos x)$ 应用命题 111, 取 $a=-1, b=1, r=1$ $t=\frac{1}{2}$.

114. 若 $f(x)$可微且 $F(x)=\sqrt{1-x^2}f'(x)$在$[-1,1]$为有界变差函数, 则

$$|E_n(f)|\leqslant\frac{\pi^2}{16n^2}\bigvee_{-1}^{1}(F).$$

§5. 微分算子及函数方程在计算中的应用

微分算子$D=\dfrac{d}{dz}$可以看作差分算子的极限情形．它也是一种线性算子．在本节中我们仅仅列举少数几个例题，借以表明算子zD在解析计算中的用处．

谈到函数方程，实际上我们已经在§1的命题17（欧拉恒等式）的证明中遇见过．但在本节中，我们将通过若干著名命题的演证步骤，着重显示此类函数方程在计算中所起的关键作用与应用方式．

115． 设$f(x)$为任一多项式，$zD=z\dfrac{d}{dz}$为一微分算子．试证

$$f(zD)z^k=f(k)z^k.$$

［证］ 设$f(x)$在复数域上被分解成

$$f(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

则因

$$(zD-x_n)z^k=kz^k-x_nz^k=(k-x_n)z^k,$$

$$(zD-x_{n-1})(zD-x_n)z^k=(k-x_{n-1})(k-x_n)z^k,\cdots.$$

故依此类推得

$$f(zD)z^k=c(k-x_1)(k-x_2)\cdots(k-x_n)z^k=f(k)z^k.$$

116． 设$f(x)$为任一整系数的多项式．试证明下级数

$$f(0)+\frac{f(1)}{1!}+\frac{f(2)}{2!}+\cdots+\frac{f(k)}{k!}+\cdots$$

之和必为自然对数之底e的整数倍． (Darboux)

［提示］ 只须证明下式中的$g(z)$为一整系数多项式：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{k!}z^k=f(zD)e^z=e^zg(z).$$

因为事实上命题中的级数之和即等于$eg(1)$．

117． 置

$$(zD)^n\frac{1}{1-z}=1^n z+2^n z^2+3^n z^3+\cdots=\frac{f_n(z)}{(1-z)^{n+1}}$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

求证 $f_n(z)$ 必为一 n 次多项式，且 $f_n(0)=0, f_n(1)=n!$.

(Cesàro)

［证］ 将算子 zD 连续 n 次地施行于函数 $(1-z)^{-1}$ 之上即可证明. 事实上易算出

$$\begin{aligned}(zD)^n(1-z)^{-1}&=(zD)^{n-1}(zD)(1-z)^{-1}=(zD)^{n-1}z(1-z)^{-2}\\&=(zD)^{n-2}\{z(1-z)^{-2}+2!z^2(1-z)^{-3}\}=\cdots\\&=(zD)^{n-n}\{z(1-z)^{-2}+\cdots+n!z^n(1-z)^{-n-1}\}\\&=\{z(1-z)^{n-1}+\cdots+(n-1)!z^{n-1}(1-z)\\&\quad+n!z^n\}(1-z)^{-n-1}.\end{aligned}$$

由是还可见 $f_n(0)=0, f_n(1)=n!$.

118. 设 $f(x)$, $g(x)$ 为任意两个不含非负整根的代数多项式. 试证函数

$$y=\frac{f(0)}{g(0)}+\frac{f(1)}{g(1)}z+\frac{f(2)}{g(2)}z^2+\frac{f(3)}{g(3)}z^3+\cdots$$

必满足微分方程

$$g\left(z\frac{d}{dz}\right)y=f\left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{1-z}. \qquad \text{(Abel)}$$

［证］ 我们知道幂级数在它的收敛区域的内部是可以逐项微分的. 因此应用命题 115 可以得

$$\begin{aligned}g(zD)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{g(k)}z^k&=\sum_{k=0}^{\infty}g(k)\frac{f(k)}{g(k)}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}f(zD)z^k=f(zD)\sum_{k=0}^{\infty}z^k=f(zD)\,\frac{1}{1-z}\quad(|z|<1).\end{aligned}$$

119. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是两个互质的多项式，其中 $g(z)$ 的次数不低于 $f(x)$ 的次数并且 $g(0)=0$. 又设 $g(n)\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$. 则

下列函数

$$y=1+\frac{f(1)}{g(1)}z+\frac{f(1)f(2)}{g(1)g(2)}z^2+\frac{f(1)f(2)f(3)}{g(1)g(2)g(3)}z^3+\cdots$$

必满足齐次线性常微分方程

$$g\left(z\frac{d}{dz}\right)y=f\left(z\frac{d}{dz}\right)zy.$$

［提示］ 显而易见

$$g(zD)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(1)f(2)\cdots f(k)}{g(1)g(2)\cdots g(k)}z^k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}g(k)\frac{f(1)f(2)\cdots f(k)}{g(1)g(2)\cdots g(k)}z^k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}f(k)\frac{f(1)\cdots f(k-1)}{g(1)\cdots g(k-1)}z^k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}f(zD)\ \frac{f(1)\cdots f(k-1)}{g(1)\cdots g(k-1)}z^k$$

$$=f(zD)zy.$$

120. 试证函数

$$y=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2z+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2z^2+\cdots+\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^2z^n+\cdots$$

适合下列微分方程

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+(1-2z)\frac{dy}{dz}-\frac{1}{4}y=0.$$

［提示］ 此为命题 119 的特例:

$$g(x)=x^2,\ f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

121. 设将 $F(z)=(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\cdots(|q|<1)$表成幂级数

$$F(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\cdots.$$

试利用下列函数方程

$$F(z)=(1-qz)F(qz)$$

以决定系数 A_n 的数值.

［解］ 比较函数方程的两端幂级数中 z^n 项的系数易得

$$A_n=A_nq^n-A_{n-1}q^n,$$

亦即 $A_n=A_{n-1}q^n/(q^n-1)(n=1,2,3,\cdots)$. 由此逐步递推得

$$A_n=\frac{q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^n-1)}\qquad(n=1,2,3,\cdots).$$

122. 设函数 $F(z)$ 已由命题 121 所定义. 试决定下列幂级数的系数:

$$\frac{1}{F(z)}=B_0+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+\cdots$$

［解］ 由

$$\frac{1}{F(z)}=\frac{1}{(1-qz)F(qz)}=\frac{1}{1-qz}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cdot(qz)^n,$$

比较系数得 $B_n(1-q^n)=B_{n-1}q(n=1,2,3,\cdots)$. 因此递推得

$$B_n=\frac{q^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

123. 试决定下列方程中的系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$:

$$\begin{aligned}&(1+qz)(1+qz^{-1})(1+q^3z)(1+q^3z^{-1})\\&\quad\cdots(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1})\\&=c_0+c_1(z+z^{-1})+c_2(z^2+z^{-2})+\cdots+c_n(z^n+z^{-n}).\end{aligned}$$

［提示］ 令 $\phi_n(z)$ 表方程左端的函数, 则有函数方程

$$\phi_n(q^2z)=\phi_n(z)\frac{1+q^{2n+1}z}{qz+q^{2n}}.$$

从而得 $c_\nu q^{2\nu+1}(1-q^{2n-2\nu})=c_{\nu+1}(1-q^{2n+2\nu+2})$ $(\nu=0,1,2,\cdots,n-1)$, $c_n=q^{n^2}$ 因此有

$$c_\nu=\frac{(1-q^{2n+2\nu+2})(1-q^{2n+2\nu+4})\cdots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n-2\nu})}q^{\nu^2}$$

$(\nu=0, 1, \cdots, n-1)$.

124. (雅可比恒等式)设$|q|<1$. 则下列等式对$z\neq 0$是恒等式:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1})(1-q^{2n})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}z^n.$$

(雅可比, K. Jacobi, 1804—1851.)

[提示] 可以由命题123通过极限手续来证明. 根据该题的方程可以置

$$\prod_{\nu=1}^{n}(1+q^{2\nu-1}z)(1+q^{2\nu-1}z^{-1})(1-q^{2\nu})$$

$$=d_0(n)+\sum_{\nu=1}^{[n/2]}d_\nu(n)(z^\nu+z^{-\nu})+\sum_{\nu=[n/2]+1}^{n}d_\nu(n)(z^\nu+z^{-\nu})$$

$$=d_0(n)+S_n+S_n',$$

此处

$$d_0(n)=c_0(n)(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})$$
$$=(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})\cdots(1-q^{4n}),$$
$$d_\nu(n)=(1-q^{2n+2\nu+2})(1-q^{2n+2\nu+4})\cdots(1-q^{4n})$$
$$(1-q^{2n-2\nu+2})\cdots(1-q^{2n})q^{\nu^2}\quad(\nu=1, 2, \cdots).$$

由是可知当$|q|<1, 1\leqslant\nu\leqslant\frac{n}{2}$时, $|d_\nu(n)q^{-\nu^2}-1|=o(1)(n\to\infty)$.

故

$$\left|S_n-\sum_{\nu=1}^{[n/2]}q^{\nu^2}(z+z^{-1})\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{[n/2]}|d_\nu(n)-q^{\nu^2}|(|z|^\nu+|z|^{-\nu})$$

$$=o(1)\sum_{\nu=1}^{[n/2]}|q|^{\nu^2}(|z|^\nu+|z|^{-\nu})=o(1).$$

又当$\frac{n}{2}<\nu\leqslant n$时,

$$|d_\nu(n)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(1+|q|^{2k})(|q|^{\nu^2})=K\cdot|q|^{\nu^2}\quad(K=\text{常数}),$$

故

$$|S_n'|\leqslant K\sum_{\nu=[n/2]+1}^{n}|q|^{\nu^2}(|z|^{\nu}+|z|^{-\nu})\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以命 $n\to\infty$ 时便得

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+q^{2\nu-1}z)(1+q^{2\nu-1}z^{-1})(1-q^{2\nu})$$

$$=d_0(\infty)+\sum_{\nu=1}^{\infty}q^{\nu^2}(z^{\nu}+z^{-\nu}),\ d_0(\infty)=1.$$

125. 试证欧拉恒等式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}(3n^2+n)}(|q|<1).$$

［提示］ 此为命题 124 (雅可比恒等式)的特例. 只须在该题中将 q 换作 $q^{\frac{3}{2}}$ 并令 $z=-q^{\frac{1}{2}}$ 便得.

126. 试证高斯恒等式

$$\frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^6}{1-q^5}\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{1}{2}n(n+1)}\quad(|q|<1).$$

［提示］ 于命题 124 中将 q 换作 $q^{\frac{1}{2}}$ 并令 $z=q^{\frac{1}{2}}$, 便有

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{n-1})=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{\frac{1}{2}n(n+1)}=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

又由§1 的命题 16 的证明可知

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1})=2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^{-1}.$$

以此代入上式便得所要证明的结果.

127. 试证当 $|q|<1$ 时有

$$\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\cdots=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots\quad\text{(Jacobi)}$$

［提示］ 于命题 124 取 $z=-1$ 并利用命题16中的等式即得.

128. 试证当$|x|<1$时有下列恒等式:

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^{2kn+k-l})(1-x^{2kn+k+l})(1-x^{2kn+2k})$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{kn^2+ln},$$

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2kn+k-l})(1+x^{2kn+k+l})(1-x^{2kn+2k})$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}x^{kn^2+ln}.$$

[提示] 此为命题124的特例: $q=x^k, z=\pm x^l$.

129. 试证

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^{5n+1})(1-x^{5n+4})(1-x^{5n+5})$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(5n+3)}.$$

[提示] 于命题128的第一个恒等式中取$k=\frac{5}{2}, l=\frac{3}{2}$.

130. 试证

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^{5n+2})(1-x^{5n+3})(1-x^{5n+5})$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(5n+1)}.$$

[提示] 于命题128的第一个恒等式中取$k=\frac{5}{2}, l=\frac{1}{2}$.

131. 试证柯西(A. L. Cauchy, 1789—1857)恒等式

$$\prod_{n=1}^{m}(1+x^{2n-1}z)=1+\sum_{n=1}^{m}\frac{(1-x^{2m})(1-x^{2m-2})\cdots(1-x^{2m-2n+2})}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2n})}.$$

132. 试证 $f(z)=1+\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{5}z^4+\frac{1}{7}z^6+\cdots$适合下列函数方程:

$$f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)=(1+z^2)f(z).$$

［提示］ 显然 $f(z)=\frac{1}{2z}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

133. 试证恒等式

$$\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{5m+1})(1-x^{5m+4})}$$

$$=\frac{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{1}{2}(5n^2-n)}+x^{\frac{1}{2}(5n^2+n)}\right)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots},$$

［提示］ 如将右端的分母 $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$ 移至等式的左端、则可见到本命题实即命题 130 的另一形式.

134. 试证恒等式

$$\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{5m+2})(1-x^{5m+3})}$$

$$=\frac{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{1}{2}(5n^2-3n)}+x^{\frac{1}{2}(5n^2+3n)}\right)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}.$$

135. 令 $F=F(\alpha,\ x)$ 为任一可表作 α 的幂级数的函数. 又令字母 η 表示一种代换手续(可作为运算来看), 其定义为

$$\eta F(\alpha, x)=F(\alpha x, x).$$

试证当 F 适合函数方程 $F=\eta F+\alpha\eta^2F$ 及条件 $F(0,x)=1$ 时, 有

$$F(\alpha, x)=1+\frac{\alpha}{1-x}+\frac{\alpha^2x^2}{(1-x)(1-x^2)}+\cdots$$

$$+\frac{\alpha^r x^{r(r-1)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}+\cdots.$$

［证］ 令 $F=1+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots$. 则由函数方程得

$$1+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots=1+c_1(\alpha x)+c_2(\alpha x)^2+\cdots$$

$$+\alpha\{1+c_1(\alpha x^2)+c_2(\alpha x^2)^2+\cdots\}.$$

比较 α 之同次幂的系数，得

$$c_1=\frac{1}{1-x},\quad c_2=\frac{x^2}{1-x^2}c_1,\quad c_3=\frac{x^4}{1-x^2}c_2,\cdots$$

从而依次递推出

$$c_r=\frac{x^{r(r-1)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}\quad(r=1,2,\cdots).$$

136. 令 m 表整数 0, 1 或 2. 又令

$$G_m=G_m(\alpha,x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\alpha^{2r}x^{\frac{1}{2}r(5r+1)-mr}(1-\alpha^m x^{2mr})C_r,$$

此处 $G_0=0$, $C_0=1$，而当 $r>0$ 时

$$C_r=C_r(\alpha,x)=\frac{(1-\alpha)(1-\alpha x)\cdots(1-\alpha x^{r-1})}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}.$$

则

$$G_{3-m}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\alpha^{2r}x^{\frac{1}{2}r(5r+1)-(3-m)r}\{1-\alpha^{3-m}x^{(3-m)2r}\}C_r,$$

$$\eta G_{3-m}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\alpha^{2r}x^{\frac{1}{2}r(5r+1)+(m-1)r}\{1-\alpha^{3-m}x^{(3-m)(2r+1)}\}\eta C_r,$$

$$G_m-G_{m-1}=(1-\alpha)\alpha^{m-1}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r a^{2r}x^{\frac{1}{2}r(5r+1)+(m-1)r}$$

$$\cdot\{1-\alpha^{3-m}x^{(3-m)(2r+1)}\},$$

$$\cdot\eta C_r=(1-\alpha)\alpha^{m-1}\eta G_{3-m}\quad(m=1,2),$$

其中算子 η 如命题 135 所定义的.

[提示] 由初等计算即可得出.

137. 设 G_m 为由命题 136 所定义者，又设

$$F_m=F_m(\alpha,x)=\frac{G_m(\alpha,x)}{(1-\alpha)(1-\alpha x)(1-\alpha x^2)\cdots}\quad(m=0,1,2).$$

试证如上所定义的 $F_2(\alpha,x)$ 即适合命题 135 中的函数方程：

$$F_2=\eta F_2+\alpha\eta^2F_2.$$

［证］ 由命题 136 的最后一等式我们有

$$F_m-F_{m-1}=\frac{G_m-G_{m-1}}{(1-\alpha)(1-\alpha x)(1-\alpha x^2)\cdots}$$

$$=\frac{(1-\alpha)\alpha^{m-1}G_{3-m}}{(1-\alpha)(1-\alpha x)(1-\alpha x^2)\cdots}$$

$$=\alpha^m\eta F_{3-m}.$$

由于 $G_0=0, F_0=0$, 故于上式中取 $m=1$ 及 $m=2$ 即得

$$F_1=\eta F_2,\quad F_2-F_1=\alpha\eta F_1.$$

从而 $F_2=\eta F_2+\alpha\eta^2F_2$.

138. (罗杰尔-腊曼奴扬的恒等式)设$|x|<1$. 则

(1) $$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

$$=\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{5m+1})(1-x^{5m+4})}.$$

(2) $$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

$$=\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{5m+2})(1-x^{5m+3})}.$$

(罗杰尔, L. J. Roger; 腊曼奴扬, S. Ramanujan.)

［证］ 由命题 133 及 134, 可见只须证

(3) $$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\cdots=\frac{1-x^2-x^3+x^9+x^{11}-\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}.$$

(4) $$1+\frac{x^2}{1-x}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)}+\cdots=\frac{1-x-x^4+x^7+x^{13}-\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}.$$

由命题 137 可知 $F_2(\alpha,x)$满足函数方程 $F_2=\eta F_2+\alpha\eta^2F_2$, 且$F_2(0,x)=G_2(0,x)=1$. 因此由命题 135 得

$$1+\frac{\alpha}{1-x}+\frac{\alpha^2x^2}{(1-x)(1-x^2)}+\cdots+\frac{\alpha^rx^{r(r-1)}}{(1-x)\cdots(1-x^r)}+\cdots$$

$$=F_2(\alpha, x)=\frac{G_2(\alpha, x)}{(1-\alpha)(1-\alpha x)(1-\alpha x^2)\cdots}.$$

如在上式中令 $\alpha=x$, 则因

$$G_2(x, x)=(1-x^2)-x^3(1-x^6)+x^{11}(1-x^{10})-\cdots$$
$$=1-x^2-x^3+x^9+x^{11}-\cdots,$$

故立即得出(3). 由此可知等式(1)成立. 又因

$$1+\frac{\alpha x}{1-x}+\frac{\alpha^2x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{\alpha^3x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\cdots$$
$$=\eta F_2=F_1=\frac{G_1(\alpha, x)}{(1-\alpha)(1-\alpha x)(1-\alpha x^2)\cdots},$$

故于上式中令 $\alpha=x$ 即得(4), 从而(2)亦获证.

139. 设 $f(\alpha)=f(\alpha, x)=F_1(\alpha, x)=\eta F_2(\alpha, x)=F_2(\alpha x, x)$, 其中 F_1, F_2 系由命题 137 所规定. 则当 $|x|<1$ 时有下列连分式展开式成立:

$$\frac{f(\alpha)}{f(\alpha x)}=1+\frac{\alpha x}{1+}\frac{\alpha x^2}{1+}\frac{\alpha x^3}{1+\cdots}. \qquad \text{(Ramanujan)}$$

［提示］ 由命题 137 可知

$$F_2(\alpha, x)=F_2(\alpha x, x)+\alpha F_2(\alpha x^2, x),$$
$$F_2(\alpha x, x)=F_2(\alpha x^2, x)+\alpha x F_2(\alpha x^3, x), \text{等等.}$$

又

$$f(\alpha)=F_1(\alpha, x)=F_2(\alpha x, x)=1+\frac{\alpha x}{1-x}+\frac{\alpha^2x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\cdots.$$

显然 $f(\alpha)$ 适合关系

$$f(\alpha x^n)=f(\alpha x^{n+1})+\alpha x^{n+1}f(\alpha x^{n+2}).$$

故若令

$$u_n=\frac{f(\alpha x^n)}{f(\alpha x^{n+1})}, \quad u_0=\frac{f(\alpha)}{f(\alpha x)},$$

则得

$$u_n=1+\frac{\alpha x^{n+1}}{u_{n+1}}.$$

因此$u_0=f(\alpha)/f(\alpha x)$可逐步展开成

$$\frac{f(\alpha)}{f(\alpha x)}=1+\frac{\alpha x}{1+}\,\frac{\alpha x^2}{1+}\,\frac{\alpha x^3}{1+\cdots},$$

且由连分式收敛理论不难判定上式当$|x|<1$时为收敛。

140. 试证下列的腊曼奴扬恒等式:

$$1+\frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{1+}\,\frac{x^3}{1+\cdots}=\frac{1-x^2-x^3+x^9+x^{11}-\cdots}{1-x-x^4+x^7+x^{13}-\cdots}$$

$$=\frac{(1-x^2)(1-x^7)(1-x^{12})\cdots(1-x^3)(1-x^8)(1-x^{13})\cdots}{(1-x)(1-x^6)(1-x^{11})\cdots(1-x^4)(1-x^9)(1-x^{14})\cdots}$$

$$(|x|<1).$$

[提示] 应用命题 139 及 138 即可得出.

141. 试证命题 14 中的关于正整数 n 的分拆数 $p(n)$满足下列递推关系式:

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+\cdots$$

$$+(-1)^k p\left(n-\frac{1}{2}k(3k-1)\right)+(-1)^k p\left(n-\frac{1}{2}k(3k+1)\right)$$

$$+\cdots=0.$$

[证] 由命题 125 的欧拉恒等式, 我们有

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{x^{\frac{1}{2}n(3n-1)}+x^{\frac{1}{2}n(3n+1)}\}.$$

故按命题 14, 得

$$\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{x^{\frac{1}{2}n(3n-1)}+x^{\frac{1}{2}n(3n+1)}\}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)x^n\right)=1.$$

由是若将上式左端展开式中 x^n 项的系数写下来, 就得到本命题的结果.

[注意] 命题 141 的递推公式可用以计算$p(n)$的值. 不难看

出，对于固定的 n 来说，递推公式的项数大约为$2\cdot\left(\frac{2}{3}n\right)^{1/2}$. 麦克蒙曾用这个递推公式计算至 $n=200$. 例如，他曾算出

$$p(200)=3972999029388.$$

但是这样的方法对于较大的 n 来说，在计算上是十分麻烦的. 寻求很大数值的 $p(n)$的有效方法已由哈代(G. H. Hardy, 1877—1947)与印度数学家腊曼奴扬(S. Ramanujan, 1887—1920)所发明，那正是他们合作研究中的最主要成果之一.

关于第二章的注释

注 1. 在 §1 中，我们见到：许多线性不定方程整数解组的计算问题，一般地都可以转变成幂级数乘法的计算问题. 这种问题形式的转变之所以成为可能，其基本原因就在于：当几个幂级数连乘起来时，各项乘幂之间的结合方式恰好能与各个整数解组的构成方式成立一一对应的关系. 换句话说，这种对应关系的存在，正是决定着幂级数工具能够应用到线性不定方程解的个数问题的关键. 因此，通常当我们应用这种工具时，最首要的一步，就是必须按照整数解组的"构成方式"及其限制条件，适当地配置若干个幂级数的乘积，然后再设法寻求乘积级数中的系数(因为系数就代表着"构成方式"的个数). 显然 §1 中的命题 1—16 以及 22, 23 等，都无非是这样一个方法原则的具体运用而已.

注 2. 命题 17—19 的证明方法是特别值得注意的. 其方法的基本技巧就在于巧妙地引进一个参变量 α，然后导出参变量的函数 $F(\alpha)$所应适合的函数方程，并将方程的每一边都展开成 α 的幂级数. 因而在最后，令 α 取特殊数值时也就得出了所要证明的欧拉恒等式. 显然，我们应该把这些恒等式理解为上述方法运用下的自然结果，而方法本身也就隐含了证明步骤.

注 3. 例题 13 只是用来表明这样一个事实：以幂级数作为生成函数的这一工具，亦能用来解决某些初等概率的计算问题——组合概率论中的问题.

注 4. 例题 24 体现了这样一个组合分析的计算原则：涉及自然数 n 的较为复杂的组合数之计算，可以先设法建立其递推关系式. 一般说来，递推关系式也就是“差分方程”. 对于所建立的差分方程，如能求得一般解，这也就是所要求的组合数. 即使在不能求得差分方程一般解的情形，它也可以用来逐个地计算组合数.

注 5. 大家知道，线性常系数的差分方程的一般解可借助于幂级数作生成函数来求得. 例题 24(还有 25)则表明某些非线性的差分方程亦可借助于幂级数作生成函数来求解. 当然，这种解一般与二项式系数有关.

注 6. §2 主要是阐述这样一种技巧：通过二项式级数的各种运算来得到关于二项系数间的关系式. 由于这些关系式在解析计算中是基本的工具，因而这种技巧的意义是重要的. 在这里，下列两个二项式级数

$$(1+x)^{\mu}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\mu}{k}x^{k},\quad (1-x)^{-n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^{k}$$

最常用到. 请注意，前一个展开式系数的“流标在下”，后一个展开式的“流标在上”. 这一简单的事实对于面临问题时挑选适当的二项式是有指导作用的. 而例题 41 的另一证法表明，当一个“流标在下”，一个“流标在上”的两个二项系数相乘时，往往可把“流标集中”到一个二项系数中去.

注 7. 命题 48 是一对在组合算法中十分有用的互逆公式. 这对公式的好处就在于它们的简单性和对称性. 它们的作用可以从例题 49—55 的证明中看出来. 但同时必须指出，这对公式在应用上也有其局限性. 那就是只有当 $g(k)$ 是一个与 n 无关的函数，而

f 是 g 的“组合变换”

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k g(k) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

时，才能从而得出 g 亦是 f 的“组合变换”的结论来. 一般地，如果 $g(k)$ 的位置是一个二元函数 $g(k,n)$ 时，那末互逆公式便未必成立. 这一点在应用命题 48 时是需要留意的.

注 8. 在范德蒙(A. T. Vandermonde, 1735—1796)恒等式(题 35)和李善兰恒等式(题 57, 58)的证明中我们用到了所谓“多项式恒等原理”. 这个原理虽是简单而明白，但用处却不小，因而是值得一提的.

注 9. 在 §3 中，我们所讨论的算子 Δ 是一个以 1 为步长的差分算子. 但是这并不损害 §3 中若干公式的一般性. 因为在事实上，以 $\varepsilon>0$ 为步长的差分算子 Δ_ε 的作用总是可以通过 Δ 来表现的:

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon f(x)&=f(x+\varepsilon)-f(x)=f\left(\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}+1\right)\right)-f\left(\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\\&=g\left(\frac{x}{\varepsilon}+1\right)-g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\Delta g(x'),\end{aligned}$$

此处 $x'=x/\varepsilon$, $g(x')=f(\varepsilon x')$.

注 10. 牛顿-格雷戈里的插值公式(命题 64)虽然是数值计算的基本工具，但在解析计算中也很有用. 我们介绍它的主要兴趣在于后者. 随着数值分析中样条函数的运用，它作为数值插值问题的解答的功能似在减弱，但在解析计算中的作用却仍极大. 在第四章我们还要回过头来重新讨论这个问题.

注 11. 伯努利数、伯努利多项式以及伯努利函数是极其重要的解析工具. §4 的许多命题都表明了这一基本点. 例如，命题 84, 85 和 96 表明只有引入伯努利数才使一些解析表达成为可能.

而命题 103 的伯恩斯坦不等式说明若干函数论中的极值问题与伯努利函数有关. 伯恩斯坦(С. Н. Бернштейн, 1880—1968)的这个不等式是鲍耳(Bohr)的如下不等式的拓广: 若 $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=0$, $f(2\pi)=f(0)$且$|f'(x)|\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$, 则$|f(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$. 显然, 伯恩斯坦的拓广亦只有在引入伯努利函数时才有可能. 伯恩斯坦的结果已于1964年被莫托尔纳伊(В. П. Моторный)拓广到同一类函数的光滑模的极值上来. 这一拓广同样是以伯努利函数为基本工具的.

注 12. 欧拉—马克劳林公式是十分有力的解析工具. 许多较为困难的问题通过这个公式变得非常容易, 而且结论更为一般. 例如, 上面提到的伯恩斯坦的结果被轻易地纳入命题 102. 又如崔锦泰的定理(命题 113)、华罗庚和王元的定理(命题 107)以及埃特金松(F. V. Atkinson, 1916—)的定理(命题 105 不等式的左部)都轻易地纳入命题 104, 便是得力于欧拉-马克劳林公式的缘故. 命题 104 当 $r>1$ 的情形是本书两个编者合作的研究成果. 它的条件较宽, 而其表达形式便于应用, 并且还能包含经典的估值方法(见命题 109). 命题 104 当 $r=1$ 时的证明较繁, 此地没有给出, 请参见《计算数学》1978 年第 3 期王兴华的文章《关于求积公式的若干注记》. 命题 102 亦是王兴华的工作, 见《杭州大学学报·自然科学版》, 1962 年第 1 期.

注 13. 数值分析的当代发展表明欧拉-马克劳林公式的应用是多方面的. 我们甚至还可以说它是样条分析的肇端, 而伯努利函数则是某种样条函数. (关于样条函数, 请参见书末文献目录所列许玛克(L. L. Schumaker)的书:《样条函数: 基本理论》.

注 14. 由 §5 中的命题 115 看来, 当微分算子 zD 所作成的算子多项式 $f(zD)$ 作用于幂级数的各项时, 其形式特别简单. 正因

为这样，我们也就能够顺利地导出阿贝尔的几个命题——118，119及120等题．这些命题主要是针对某种类型的常微分方程，直接给出了其级数形式的解答．因而它们是具有一定的应用价值的．

注 15． §5 中的许多著名命题（例如雅可比、高斯、欧拉、拉曼奴扬等恒等式）都表现着无穷乘积与无穷级数的联结关系．这些关系的获得，主要是利用了函数方程的展开的办法．如同命题 17 的证法一样（参见注 2），函数方程首先是从带有一个参变量 q（或 α）的连乘积的构造得来的（见例题 121—123），它可以看作是一种关于乘积形式的变量的外部联系，也就是从变量的整个结构形式所得出的一种表面的关系．方法的第二个重要步骤，就是必须将函数方程加以展开，由是进行系数比较的结果，使得我们能够获得变量构造形式之间的内部的联系，也就是得到无穷乘积与无穷级数之间的联系．

注 16． 在 §5 中，劳杰尔-腊曼奴扬恒等式（命题 138）的证明，虽然也是利用了函数方程的办法，但在方法技巧上却是大大提高了一步．方法中最主要的一点，是引进了对于参变量的局部性代换手续 η（见命题 135—137）．这种局部代换手续，实质上就是为了使我们有可能对于一个带有参变量的函数及其展开式具有更多的变化形式，因而也就使得我们能更多地发现变量结构间的内部联系．关于这一点，只要仔细地研究一下命题 135—138 的证法，就会深刻地体会到的．此外，值得提到的是：命题 138 还有别的证法，其中最初等的证明，曾由许尔（I. Schur，1875—1941）所发现，他的证明完全根据关于分拆数的组合推理，但其推理步骤也还是极其复杂的．

第三章　不　等　式

不等式涉及数量之间大小的比较，而通过比较常能显示出变量变化之间相互制约的关系．因此，从某种意义上说，不等式的探讨，在数学分析中甚至比等式的推演更为重要．这是很明显的，当我们在数学分析中研究和估计变量变化的状态或趋势时，时常要用简单熟知的变量与之比较．这样，它们之间可以用等号来联系的可能性往往是很小的，而不等关系的存在却反而是常见的．举例来说，$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ 是超越函数，而当 k 是常数时 $k\frac{x}{1-x^2}$ 是有理函数，二者之间根本谈不上有用等号联结的可能．但是我们却能建立如下的优美不等式(见例题 144)：

$$\frac{4}{\pi}\frac{x}{1-x^2}\leqslant\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{x}{1-x^2}\quad(0\leqslant x<1).$$

从此不等式我们可以得到启发，以结构较为简单的函数代替一个超越函数而能保存该超越函数的许多特征，并且损失不多．再如，在下面第二节要介绍的“幂平均值”$M_r(a)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{1/r}$ 中，只有 $M_1(a)$ 有如下的加法等式关系：

$$M_1(a+b)=M_1(a)+M_1(b).$$

但是利用不等式，我们就能把这个加法关系部分地承袭下来(见命题 58)：

$$M_r(a+b)\geqslant M_r(a)+M_r(b)\quad(r<1),$$

$$M_r(a+b)\leqslant M_r(a)+M_r(b)\quad(r>1).$$

这就说明了不等式的使用为什么反而成为数学分析中的常事．

当不等式中的变量个数为有限并且联结各个变量的是一些初

等运算时，即称此不等式为有穷不等式．如果变量的个数增至无限，则称为无穷不等式．倘若不等式所指示的是某些变量的积分值之间的关系，则称做积分不等式．

本章共五节，在第一节中，我们列举了若干简单的有穷不等式作为例题和习题．在这一节中，利用恒等变形和简单观察、数学归纳法以及二次型的推理方法是值得注意的．在第二节我们介绍各种平均值的概念与它们之间的不等式．其中特别值得注意的是刻划幂平均值的单调性的不等式以及赫尔特（O. Hölder，1859—1937）不等式，因为这些不等式在近代数学分析中应用广泛而且方便．在第三节我们着重叙述与某些有穷不等式相对应的积分不等式及无穷不等式．并且为了论述有关不等式的更一般的方法起见，我们通过几个典型的命题简单地介绍了琴生（J. L. W. V. Jensen，1859—1925）关于凸性函数的理论．在第四节我们叙述了各种特殊类型的不等式作为补充命题及杂题．在本章的最后一节中，我们列举了一些有关常用函数的不等式，这些不等式不仅本身颇为有用，它们的证法亦可资进一步熟练不等式技巧之用．

§1．若干简单的有穷不等式

1． 设 m, n 为两个任意的正整数，$m<n$．试证

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}<\sum_{m}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}.$$

［提示］ 易见 $2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1}$.

2． 试求 $x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}$ 的整数部分 $[x]$．

［答］ 利用命题1可得 $1998<x<1999$，所以 $[x]=1998$.

3. 试求$[50x]$的值，式中

$$x=\frac{1}{\sqrt{10,000}}+\frac{1}{\sqrt{10,001}}+\frac{1}{\sqrt{10,002}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}.$$

［答］ 利用命题1可得 $1800<x<1800.02$, 所以 $[50x]=90000$.

4. 利用等式$\frac{\pi^2}{6}=\sum_1^\infty\frac{1}{k^2}$(参看第二章命题96)，证明

$$\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{n}<\sum_1^n\frac{1}{k^2}<\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{n+1}$$

5. 试求与 $x=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}}$最接近的整数$\langle x\rangle$.

［答］ 与命题1和2类似地可得 $14998.5<x<14999.5$, 所以 $\langle x\rangle=14999$.

6. 利用等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1)$ (其中γ为欧拉常数，参见第四章题25)，证明

$$\ln\frac{5}{3}<\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\cdots+\frac{1}{5n}+\frac{1}{5n+1}\leqslant\frac{37}{60}.$$

(Lučić-Djokorić)

［证］ 记上式居中的和为S_n，可以算得

$$S_n-S_{n+1}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3n+i}-\sum_{i=2}^{6}\frac{1}{5n+i}=\frac{P_5(n)}{\prod_{i=1}^{3}(3n+i)\prod_{i=2}^{6}(5n+i)},$$

式中$P_5(n)$是n的5次多项式，并且系数全是正的．因此S_n单调递减，

$$\lim_{n\to\infty}S_n<S_n\leqslant S_1.$$

而由已知等式及记法，分别可以算出

$$\lim S_n=\ln 5-\ln 3,\quad S_1=37/60.$$

7. 设 c 为任意正数. 则

$$\frac{1}{c^2+\frac{1}{2}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+c^2)^2}<\frac{1}{c^2}.\qquad\text{(Mathieu)}$$

［证］ 显然

$$\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+c^2-\frac{1}{4}}-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+c^2-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2n}{(n^2+c^2-n)(n^2+c^2+n)}>\frac{2n}{(n^2+c^2)^2}.$$

$$\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+c^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+c^2+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2n}{(n^2+c^2)^2+c^2+\frac{1}{4}}<\frac{2n}{(n^2+c^2)^2}.$$

由是我们更确切地得到

$$\frac{1}{c^2+\frac{1}{2}}-\frac{1}{m^2+m+c^2+\frac{1}{2}}<\sum_{n=1}^{m}\frac{2n}{(n^2+c^2)^2}<\frac{1}{c^2}-\frac{1}{m^2+m+c^2}.$$

令 $m\to\infty$ 即得所要证的不等式. (Berg)*)

8. 设 m,n 都是正整数, 则

$$\frac{1}{m+n+1}-\frac{1}{(m+1)(n+1)}\leqslant\frac{4}{45}.\qquad\text{(Grüss)}$$

［证］ 记上式左端为 $f(m,n)$. 则 $f(1,1)=f(1,2)=f(2,1)=\frac{1}{12}<\frac{4}{45}$. 对于 $k=m+n+2\geqslant 6$, 因为 $\frac{1}{(m+1)(n+1)}\geqslant\frac{4}{(m+n+2)^2}$, 所以 $f(m,n)\leqslant\frac{1}{k-1}-\frac{4}{k^2}$, 而 $\frac{1}{k-1}-\frac{4}{k^2}$ 当 $k\geqslant 6$ 时 是递减的, 故 $f(m,n)\leqslant\frac{1}{5}-\frac{4}{36}=f(2,2)=\frac{4}{45}$.

---

*) 本命题是由曼丟(E. Mathieu, 1835—1890)猜测而由勃格(L. Berg) 证明的.

9. 设m和n都是正整数. 试证$\sqrt[n]{m}$和$\sqrt[m]{n}$中较小的一个数不超过$\sqrt[3]{3}$.

［证］ 不妨设$m\leqslant n$. 则$\sqrt[n]{m}\leqslant\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[m]{n}$. 从而$\min(\sqrt[n]{m},\sqrt[m]{n})\leqslant\sqrt[n]{n}$. 所以只要证明$\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[3]{3}$. $1\leqslant\sqrt{2}\leqslant\sqrt[3]{3}$. 设对某个整数$k\geqslant 3$, $\sqrt[k]{k}\leqslant\sqrt[3]{3}$, 即$k^3\leqslant 3^k$, 则

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1&\leqslant k^3+k\cdot k^2+k\cdot k+k^2\\
&<k^3+k^3+k\cdot k^2=3k^3\leqslant 3\cdot 3^k=3^{k+1}.
\end{aligned}
$$

所以$\sqrt[k+1]{k+1}\leqslant\sqrt[3]{3}$. 归纳推理告成.

10. 所谓斐波那契多项式$F_n(x)$是这样定义的:

$$F_n(x)=xF_{n-1}(x)+F_{n-2}(x), F_1(x)=1, F_2(x)=x.$$

试对$n=3, 4, \cdots$, 证明

$$F_n(x)^2\leqslant(x^2+1)^2(x^2+2)^{n-2}.$$

(Swamy)

11. 设$a_n>0$且$a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots)$. 试证$a_n<\frac{1}{n}$.

［证］ 由题设$0<a_{n+1}\leqslant a_n(1-a_n)$. 所以$a_1<1$. 设对某个$n\geqslant 1$, $a_n<\frac{1}{n}$已成立. 由是若$a_n\leqslant\frac{1}{n+1}$, 则$a_{n+1}\leqslant a_n(1-a_n)<a_n\leqslant\frac{1}{n+1}$; 否则$\frac{1}{n+1}<a_n<\frac{1}{n}$, 从而$a_{n+1}<a_n\cdot\frac{n}{n+1}<\frac{1}{n+1}$.

12. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$皆大于-1且同号. 则

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

(Bernoulli)

13. 若$x_1, x_2, \cdots, x_n$皆为正数, 且$x_1x_2\cdots x_n=1$. 则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n.$$

并且, 式中的等号当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$时成立.

［证］ $n=1$时命题天然成立. 今假定命题于$n=k$时已成立, 从而欲证其于$n=k+1$时亦成立. 设$x_1x_2\cdots x_{k+1}=1$. 且不妨认为诸x_i不全相同, 于是必有大于1者, 又有小于1者, 不妨设$x_1>1$, $x_{k+1}<1$. 记$x_1x_{k+1}=y_1$, 则由$y_1x_2\cdots x_k=1$和归纳法假设可得

$y_1+x_2+\cdots+x_k\geqslant k$. 因此

$$\begin{aligned}x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}&=(y_1+x_2+\cdots+x_k)+x_1+x_{k+1}-x_1x_{k+1}\\&\geqslant k+1+x_1+x_{k+1}-x_1x_{k+1}-1\\&=k+1+(x_{k+1}-1)(1-x_1)>k+1.\end{aligned}$$

归纳证明告成.

14. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数, $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是其置换. 则

$$\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\cdots+\frac{x_n}{y_n}\geqslant n.$$

特别地,

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n.$$

[提示] 利用命题 13.

15. (平均值定理)若干个正数的几何平均值必不大于它们的算术平均值.

[证] 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正数, 以 g 及 a 分别表其几何平均值及算术平均值:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=g, \quad \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

于是显然有

$$\left(\frac{x_1}{g}\right)\left(\frac{x_2}{g}\right)\cdots\left(\frac{x_n}{g}\right)=1.$$

故由命题 13 便得到

$$\frac{x_1}{g}+\frac{x_2}{g}+\cdots+\frac{x_n}{g}\geqslant n.$$

即

$$a=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant g.$$

16. 试证不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n\geqslant 2).$$

17. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数, 又 $\alpha<0<\beta$. 则

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

［提示］ 利用命题 15.

18. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

［证］ 于命题 17 置 $-\alpha=\beta=1$ 即可得出

19. 设 $0<b\leqslant a$. 则

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a}\leqslant\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}.$$

20. 设 a, b, c 都是正数. 试证

$$a^a b^b c^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

并推广之.

［证］ 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$. 则

$$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{(a+b+c)/3}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\geqslant 1.$$

一般地，设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，则

$$\frac{\prod a_i^{a_i}}{(\prod a_i)^{\frac{1}{n}\sum a_i}}=\prod_{i<j}\left(\frac{a_i}{a_j}\right)^{\frac{a_i-a_j}{n}}\geqslant 1.$$

所以对任意 n 个正数 $a_i(i=1, 2\cdots, n)$，有

$$\prod a_i^{a_i}\geqslant(\prod a_i)^{\frac{1}{n}\sum a_i}.$$

21. 试证，关于绝对值的不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 可以做如下的拓广：

$$|a|+|b|+|c|-|b+c|-|c+a|-|a+b|+|a+b+c|\geqslant 0,$$

(Hlawka)

但不能对 $n\geqslant 4$ 拓广成

$$\sum_1^n|a_i|-\sum_{i<j}|a_i+a_j|+\sum_{i<j<k}|a_i+a_j+a_k|-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}|a_1+a_2+\cdots+a_n|\geqslant 0.$$

(Luxemburg)

［证］ 我们有

$$(|a|+|b|+|c|-|b+c|-|c+a|-|a+b|+|a+b+c|)$$
$$\cdot(|a|+|b|+|c|+|a+b+c|)$$
$$=(|b|+|c|-|b+c|)(|a|-|b+c|+|a+b+c|)$$
$$+(|c|+|a|-|c+a|)(|b|-|c+a|+|a+b+c|)$$
$$+(|a|+|b|-|a+b|)(|c|-|a+b|+|a+b+c|)\geqslant 0.$$

所以第一个不等式成立．当 $n\geqslant 4$ 时第二个不等式对

$$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=1,\quad a_n=-2$$

不成立．

22. 试证，当 $x>0$ 时

$$1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+-\cdots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}>0.$$

［提示］ 试考察 $\left(\sum_0^{2k}\frac{(-1)^j x^j}{j!}\right)\left(\sum_0^{2k}\frac{x^j}{j!}\right)$

$$=1+\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu+1)!\,(k+\nu)}.$$

23. 设 $x>0$, $x\neq 1$, 又设 n 是正整数，则

$$x+\frac{1}{x^n}>2n\frac{x-1}{x^n-1}.$$

［证］ 事实上，

$$(x^{n+1}+1)(x^n-1)/(x-1)=(x^{n+1}+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$$
$$=x^n\sum_{k=1}^{n}\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)>2nx^n.$$

24. 设实数 a 满足 $0\leqslant a<1$．则对大于 $\frac{3+a}{1-a}$ 的整数 k 和任意正整数 n 成立下列不等式：

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{nk-1}>1+a. \qquad \text{(Kirov)}$$

［证］ 记上式左端的和为 S. 则由$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{4}{x+y}(x,\ y>0, x\neq y)$得

$$2S=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{nk-1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{nk-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{nk-1}+\frac{1}{k}\right)$$

$$>n(k-1)\frac{4}{n(k+1)-1}=\frac{4(k-1)}{k+1-1/n}>\frac{4(k-1)}{k+1}.$$

于是由题设得

$$S>\frac{2(k-1)}{k+1}>1+a.$$

25. 设$\sum_{i=1}^{n}x_i=p$, $\sum_{i<k}x_ix_k=q$, $n>2$. 则对每个 $i=1, 2, \cdots, n$,

$$\frac{p}{n}-\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}\leqslant x_i\leqslant\frac{p}{n}+\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}.$$

(Laguerre)

［证］ 由题设 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=p^2-2q$. 从而

$$0\leqslant\sum_{i<k}(x_i-x_k)^2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2q=(n-1)p^2-2nq.$$

即是说, n 个数的 p 和 q 之间有 $p^2-\frac{2n}{n-1}q\geqslant 0$ 的关系. 今把这个关系应用于除 x_i 外的其余 $n-1$ 个 x_j:

$$\sum_{j\neq i}x_j=p-x_i,\qquad \sum_{i\neq j<k\neq i}x_jx_k=q-x_i(p-x_i),$$

得

$$(p-x_i)^2-\frac{2(n-1)}{n-2}(q-px_i+x_i^2)\geqslant 0.$$

即

$$nx_i^2-2px_i+2(n-1)q-(n-2)p^2\leqslant 0.$$

由于左边这个二次式的判别式$(n-1)^2\left(p^2-\frac{2n}{n-1}q\right)$为非负，故其自变量 x_i 必介于其两实零点之间.

26. (柯西不等式)设 a_k 和 b_k 均为任意实数($k=1,2,\cdots,n$).则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right),$$

并且,式中等号当且仅当 a_k/b_k 为一常数时适用.

[证] 用配方法证明最为容易. 事实上,

$$\left(\sum_1^n a_k^2\right)\left(\sum_1^n b_k^2\right)-\left(\sum_1^n a_kb_k\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{k,\ j}(a_kb_j-a_jb_k)^2\geqslant 0.$$

我们还能避免两重和的出现. 因为,对任何 $\lambda\neq 0$, 有

$$\lambda^2\sum_1^n a_k^2+\frac{1}{\lambda^2}\sum_1^n b_k^2-2\sum_1^n a_kb_k=\sum_1^n\left(\lambda a_k-\frac{1}{\lambda}b_k\right)^2\geqslant 0.$$

取 λ 使

$$\lambda^2\sum_1^n a_k^2=\frac{1}{\lambda^2}\sum_1^n b_k^2=\left(\sum_1^n a_k^2\sum_1^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即得所要证的结论.

[另证] 亦可应用二元二次型的正定原理来证. 显然

$$0\leqslant\sum_1^n(a_kx+b_ky)^2=\left(\sum_1^n a_k^2\right)x^2$$

$$+\left(2\sum_1^n a_kb_k\right)xy+\left(\sum_1^n b_k^2\right)y^2$$

为 x, y 的正定二次型,故其判别式不能取正值:

$$\left(\sum_1^n a_kb_k\right)^2-\left(\sum_1^n a_k^2\right)\left(\sum_1^n b_k^2\right)\leqslant 0.$$

27. 设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是实数而 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$. 又设

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_k \quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

试证

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\leqslant b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2.$$

[证] 令 $a_{n+1}=0$. 以 a_k-a_{k+1} 乘题设不等式的两端并对 k 从 1 到 n 作和，得

$$\sum_1^n a_k^2\leqslant\sum_1^n a_k b_k.$$

两端平方，并应用柯西不等式（命题 26），得

$$\left(\sum_1^n a_k^2\right)^2\leqslant\left(\sum_1^n a_k b_k\right)^2\leqslant\left(\sum_1^n a_k^2\right)\left(\sum_1^n b_k^2\right).$$

28. （切比晓夫不等式）设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$, $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$. 则

$$\left(\sum_1^n a_k\right)\left(\sum_1^n b_k\right)\leqslant n\sum_1^n a_k b_k.$$

并且，式中的等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时适用.

[证] 显然

$$n\sum_1^n a_k b_k-\sum_1^n a_k\sum_1^n b_j=\sum_1^n\sum_1^n(a_k b_k-a_k b_j)$$

$$=\sum_1^n\sum_1^n(a_j b_j-a_j b_k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n(a_k b_k+a_j b_j-a_k b_j-a_j b_k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n(a_k-a_j)(b_k-b_j)\geqslant 0.$$

29. 若于命题 28 中记

$$D_\nu=\nu\sum_1^\nu a_k b_k-\left(\sum_1^\nu a_k\right)\left(\sum_1^\nu b_k\right),$$

则 $D_1\leqslant D_2\leqslant\cdots\leqslant D_n$. (Janić)

［证］ $D_{\nu+1}-D_\nu=\sum_{k=1}^{\nu}(a_k-a_{\nu+1})(b_k-b_{\nu+1})\geqslant 0$.

［注意］ 本题给出切比晓夫不等式的归纳证明.

30. 设 $p_k>0, a_k>0(k=1,2,\cdots,n)$. 又设 $r>0$, 则

$$\left(\sum_1^n p_k a_k^r\right)^2\leqslant\left(\sum_1^n p_k\right)\left(\sum_1^n p_k a_k^{2r}\right),$$

式中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时适用.

［证］ $\left(\sum_1^n p_k a_k^r\right)^2=\left(\sum_1^n p_k^{\frac{1}{2}}(p_k^{\frac{1}{2}}a_k^r)\right)^2$

$$\leqslant\left(\sum_1^n (p_k^{\frac{1}{2}})^2\right)\left(\sum_1^n (p_k^{\frac{1}{2}}a_k^r)^2\right)=\left(\sum_1^n p_k\right)\left(\sum_1^n p_k a_k^{2r}\right).$$

31. (琴生不等式)设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为正数. 又设 $0<r<s$. 则

$$\left(\sum_1^n a_k^s\right)^{1/s}\leqslant\left(\sum_1^n a_k^r\right)^{1/r}$$

［证］ 通过恒等变形并利用 $x^{s/r}<x(0<x<1)$ 这一明显事实:

$$\frac{\left(\sum_1^n a_k^s\right)^{1/s}}{\left(\sum_1^n a_k^r\right)^{1/r}}=\left\{\sum_1^n\frac{a_k^s}{\left(\sum_1^n a_k^r\right)^{s/r}}\right\}^{1/s}$$

$$=\left\{\sum_1^n\left(\frac{a_k^r}{\sum_1^n a_k^r}\right)^{s/r}\right\}^{1/s}\leqslant\left(\sum_1^n\frac{a_k^r}{\sum_1^n a_k^r}\right)^{1/s}=1.$$

［另证］ 令 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(\Sigma a_k^s)^{1/s}$, 则 $f(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n)=\lambda f(a_1,\cdots,a_n)$. 故琴生不等式之两端皆为诸 a_k 的一次齐次式. 因

之，于两端乘以适当的 λ 并将 λa_k 换写成新的 a_k 时，总可使 $\Sigma a_k^r=1$. 由是 $a_k^r\leqslant 1$, $a_k^s=(a_k^r)^{s/r}$, $\Sigma a_k^s\leqslant\Sigma a_k^r=1$. 从而

$$\left(\sum_1^n a_k^s\right)^{1/s}\leqslant 1=\left(\sum_1^n a_k^r\right)^{1/r}.$$

以上命 $\Sigma a_k^r=1$ 的过程常称为标准化过程. 标准化过程常常能将证明的推理变得简单.

32. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是实数，并且

$$b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2>0 \text{ 或 } a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2>0.$$

则

$$(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2) < (a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)^2,$$

式中的等号当且仅当 a_k 和 b_k 成比例时适用. (Aczél)

［证］ 设 a_k 和 b_k 不成比例，且 $b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2>0$. 则二次函数

$$\begin{aligned}f(x)&=(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2)x^2-2(a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)x\\&\quad+(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)\\&=(b_1x-a_1)^2-(b_2x-a_2)^2-\cdots-(b_nx-a_n)^2\end{aligned}$$

的首项系数为正，且 $f\left(\dfrac{a_1}{b_1}\right)<0$. 故其判别式必正. 由是即得所欲证的不等式.

33. 设 $a_k(\neq 0)$ 和 b_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 都是实数，并且

$$m\leqslant\frac{b_k}{a_k}\leqslant M \quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

则

$$\sum_1^n b_k^2+mM\sum_1^n a_k^2\leqslant(m+M)\sum_1^n a_kb_k,$$

式中的等号当且仅当 $b_k=ma_k$ 或 $b_k=Ma_k$ 时适用.

(Diaz-Metcalf)

［证］ 将下列不等式对 k 从 1 到 n 作和即可:

$$(m+M)a_k b_k - b_k^2 - mMa_k^2 = \left(\frac{b_k}{a_k} - m\right)\left(M - \frac{b_k}{a_k}\right)a_k^2 \geqslant 0.$$

34. 设 $0<m_1\leqslant a_k\leqslant M_1$, $0<m_2\leqslant b_k\leqslant M_2(k=1,2,\cdots,n)$. 则

$$\left(\sum_1^n a_k^2\right)\left(\sum_1^n b_k^2\right)\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right)^2\left(\sum_1^n a_k b_k\right)^2.$$

(Pólya-Szegö)

［证］

$$\sum_1^n b_k^2+\frac{m_2M_2}{M_1m_1}\sum_1^n a_k^2-2\left(\frac{m_2M_2}{M_1m_1}\sum_1^n a_k^2\sum_1^n b_k^2\right)^{1/2}$$

$$=\left[\left(\sum_1^n b_k^2\right)^{1/2}-\left(\frac{m_2M_2}{M_1m_1}\sum_1^n a_k^2\right)^{1/2}\right]^2\geqslant 0.$$

所以 $$\sum_1^n b_k^2+\frac{m_2M_2}{M_1m_1}\sum_1^n a_k^2\geqslant 2\left(\frac{m_2M_2}{M_1m_1}\sum_1^n a_k^2\sum_1^n b_k^2\right)^{1/2}.$$

又于命题 33 置 $m=m_2/M_1$, $M=M_2/m_1$, 得

$$\sum_1^n b_k^2+\frac{m_2M_2}{M_1m_1}\sum_1^n a_k^2\leqslant\left(\frac{M_2}{m_1}+\frac{m_2}{M_1}\right)\sum_1^n a_k b_k.$$

所以

$$4\cdot\frac{m_2M_2}{M_1m_1}\sum_1^n a_k^2\sum_1^n b_k^2\leqslant\left(\frac{M_2}{m_1}+\frac{m_2}{M_1}\right)^2\left(\sum_1^n a_k b_k\right)^2.$$

由是不难得到题中的不等式.

［注意］ 柯西不等式是用 $\Sigma a_k^2\Sigma b_k^2$ 估计$(\Sigma a_k b_k)^2$ 的上限, 本命题则是在一定的条件下用 $\Sigma a_k^2\Sigma b_k^2$ 估计$(\Sigma a_k b_k)^2$ 的下限. 也可以说是柯西不等式的逆转.

35. 试证不等式

$$\left(\sum_1^n \gamma_k u_k^2\right)\left(\sum_1^n \frac{1}{\gamma_k}u_k^2\right)\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\left(\sum_1^n u_k^2\right)^2,$$

此地 $0<m\leqslant\gamma_k\leqslant M(k=1,2,\cdots,n)$. (Канторович)

36. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是两个不成比例的实数列

(即各个比$(a_i:b_i)$不全相同). 又设实数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足

$$\sum_1^n a_i x_i = 0, \quad \sum_1^n b_i x_i = 1.$$

则

$$\sum_1^n x_i^2 \geqslant \frac{\sum_1^n a_i^2}{\left(\sum_1^n a_i^2\right)\left(\sum_1^n b_i^2\right) - \left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2},$$

式中的等号当且仅当 $x_k = x_k^*(k=1, 2, \cdots, n)$时适用, 此地

$$x_k^* = \frac{b_k \sum_1^n a_i^2 - a_k \sum_1^n a_i b_i}{\left(\sum_1^n a_i^2\right)\left(\sum_1^n b_i^2\right) - \left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2}, \qquad \text{(Ostrowski)}$$

［提示］ $\sum_1^n x_i^2 = \sum_1^n x_i^{*2} + \sum_1^n (x_i - x_i^*)^2$.

37. 设实数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n (n \geqslant 2)$ 满足 $a_i b_j \neq a_j b_i (i \neq j)$. 则

$$\frac{\sum_1^n a_i^2}{\left(\sum_1^n a_i^2\right)\left(\sum_1^n b_i^2\right) - \left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2} \leqslant \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j}\right)^2.$$

(樊畿-Todd)

［提示］ 置 $x_i = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j}$, 利用命题 36.

§2. 平均值与有穷不等式

本节出现的命题, 例题及习题, 主要是有关各种平均值之间的

大小关系．以下所考虑的常限于非负实数序列:

(a): $a_1, a_2, \cdots, a_n$; (b): $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 等.

倘有不同时为零的实数 λ 和 μ 使 $\lambda a_k=\mu b_k$ 对每个 $k=1, 2, \cdots, n$ 都成立，便说(a)和(b)成比例.

设 $r\neq 0$. 我们定义

$$M_r(a)=\left(\frac{1}{n}\Sigma a^r\right)^{1/r}=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{1/r},$$

$$M_r(a)=0(\text{若 } r<0 \text{ 且至少有一个 } a_k=0),$$

$$A(a)=M_1(a)=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

$$H(a)=M_{-1}(a)=n\Big/\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),$$

$$G(a)=(\pi a)^{1/n}=(a_1\cdot a_2\cdots a_n)^{1/n}.$$

其中 M_r 称为 r 次幂平均值，A 称为算术平均值，H 称为调和平均值，G 称为几何平均值，· A 和 H 都是 M_r 的特例，更普遍些，还有所谓加权平均值，即

$$M_r(a)=M_r(a, p)=(\Sigma pa^r/\Sigma p)^{1/r},$$

$$G(a)=G(a, p)=(\pi a^p)^{1/\Sigma p},$$

这里(p): $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是一个正数序列，称为权．加权平均值 $A(a)$ 和 $H(a)$亦依 $M_1(a)$和 $M_{-1}(a)$而得到定义.

对于加权平均值，我们可以进行标准化使 $\Sigma p=1$. 此时 p 约定以 q 记:

$$M_r=M_r(a, q)=(\Sigma qa^r)^{1/r}\quad(\Sigma q=1),$$

$$G=G(a, q)=\pi a^q\quad(\Sigma q=1).$$

当均匀加权，即 $q_1=q_2=\cdots=q_n=\dfrac{1}{n}$时，加权平均值就变成通常的幂平均值．以后如无特别声明，不等式中的平均值均系指加权平均值而言；但倘若同时有几个平均值居于一式之中，则一般认

为其权(p)是相同的．其实，从通常的幂平均值出发，只要经过一次适当的极限手续就能获得一般的加权平均值．例如设 $q_1, \cdots, q_n$ 是 n 个确定正数($\Sigma q=1$)．则可选择 $n-1$列有理数序列$\{s_k^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ ($k=1, \cdots, n-1$)，使当 $\nu\to\infty$时 $s_k^{(\nu)}\to q_k$ ($k=1, \cdots, n-1$)．又取 $s_n^{(\nu)}=1-\sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k^{(\nu)}$，则 $s_n^{(\nu)}\to q_n$．对于每一个确定的 ν 而言，令$s_1^{(\nu)}$，$\cdots$，$s_n^{(\nu)}$的公分母为 N_ν，则

$$s_k^{(\nu)}=N_{\nu,k}/N_\nu \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

此处 $N_{\nu,k}$ 为正整数，且$\sum\limits_{k=1}^{n} N_{\nu,k}=N_\nu$．如是，$M_r(a, q)$即可看做下列幂平均值的极限($\nu\to\infty$)：

$$M_r(a, s^{(\nu)})=\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^{(\nu)} a_k^r\right)^{1/r}=\left(\frac{1}{N_\nu}\sum_{k=1}^{n} N_{\nu,k} a_k^r\right)^{1/r}.$$

由于不等关系“$\leqslant$”和“$\geqslant$”在极限过程中仍能保持，所以许多不等式命题尽管就加权平均值立论，但其证明则只要考虑通常的幂平均值的情形也就够了：

关于平均值，有下列诸简单关系：

$$M_r(a)=\{A(a^r)\}^{1/r}, G(a)=e^{A(\ln a)},$$

$$M_{-r}(a)=\frac{1}{M_r(a^{-1})}, \quad M_{rs}(a)=\{M_s(a^r)\}^{1/r}$$

$$A(a+b)=A(a)+A(b), \quad G(ab)=G(a)G(b).$$

38. 若 $r>0$，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全相同．则

$$\mathrm{Min}(a)<M_r(a)<\mathrm{Max}(a).$$

39. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全相同，且无一为零．则

$$\mathrm{Min}(a)<G(a)<\mathrm{Max}(a).$$

40. 成立等式 $G(a)=\lim\limits_{r\to 0} M_r(a)$(因此命 $M_0(a)=G(a)$)．

[证] 若一切 a 皆为正，则由 $a^r=e^{r\ln a}=1+r\ln a+O(r^2)$

$(r\to 0)$，易得

$$M_r(a)=M_r(a,q)=\exp\left(\frac{1}{r}\ln\Sigma qa^r\right)$$
$$=\exp\left\{\frac{1}{r}\ln(1+r\Sigma q\ln a+O(r^2))\right\}$$
$$\to\exp(\Sigma q\ln a)=\pi a^q=G(a)\quad(r\to 0).$$

若有某几个 a 为零，其余正的 a 以 b 表之，并以 s 表对应于 b 的权 q．则

$$M_r(a,q)=(\Sigma qa^r)^{1/r}=(\Sigma sb^r)^{1/r}$$
$$=(\Sigma s)^{1/r}M_r(b,s')\quad(s'=s/\Sigma s).$$

当 $r\to 0^+$ 时，依上所证 $M_r(b,s')\to G(b,s')$ 而 $(\Sigma s)^{1/r}$ 由于 $\Sigma s<1$ 而趋于 0．所以 $M_r(a,q)\to 0=G(a)$．又当 $r\to 0^-$ 时，因为对 $r<0$ 有 $M_r=0$，故此极限式亦得成立．本命题证毕．

41． 成立等式 $\lim\limits_{r\to\infty}M_r(a)=\mathrm{Max}(a)$，$\lim\limits_{r\to-\infty}M_r(a)=\mathrm{Min}(a)$．

［证］ 设 $a_j=\mathrm{Max}(a)$．则由

$$q_j^{1/r}a_j\leqslant(\Sigma q_k a_k^r)^{1/r}=M_r(a)\leqslant a_j$$

可得 $\lim\limits_{r\to\infty}M_r(a)=a_j=\mathrm{Max}(a)$．又

$$\lim_{r\to-\infty}M_r(a)=\lim_{r\to\infty}M_{-r}(a)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{M_r(a^{-1})}=\frac{1}{\mathrm{Max}(a)}=\mathrm{Min}(a).$$

42． 设 $r>0$，且一切 a 不全相等，则 $M_r(a)<M_{2r}(a)$．

［证］ 于命题 30 取 $p=q$，$\Sigma q=1$，并将所得不等式两端配乘 $\frac{1}{2r}$ 次方幂即得．

43． (基本不等式) $G(a)\leqslant A(a)$，并且等号当且仅当诸 a 全等时适用．

［证］ 设诸 a 并非全等，则由命题 42 和 40，有

$$A(a)=M_1(a)>M_{\frac{1}{2}}(a)>M_{\frac{1}{2^2}}(a)>\cdots>M_{\frac{1}{2^\nu}}(a)\to G(a)$$
$$(\nu\to\infty).$$

［注意］ 本命题是上节平均值定理(命题 15)的拓广，它表明在最一般的意义上，算术平均值常大于几何平均值. 它也可以表示成下列形式之一(设诸 a 不全同):

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}<\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n}<q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n \quad (\Sigma q=1).$$

44. (赫尔特不等式) 设 $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ 皆为正, 且 $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$. 则

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^\alpha b_\nu^\beta\cdots l_\nu^\lambda\leqslant\left(\sum_1^n a_\nu\right)^\alpha\left(\sum_1^n b_\nu\right)^\beta\cdots\left(\sum_1^n l_\nu\right)^\lambda,$$

式中等号当且仅当$(a),(b),\cdots,(l)$中存在一组与各组皆成比例时适用.

［证］ 我们可做如下的推导, 其中不等式是据命题 43:

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma a^\alpha b^\beta\cdots l^\lambda}{(\Sigma a)^\alpha(\Sigma b)^\beta\cdots(\Sigma l)^\lambda}&=\Sigma\left(\frac{a}{\Sigma a}\right)^\alpha\left(\frac{b}{\Sigma b}\right)^\beta\cdots\left(\frac{l}{\Sigma l}\right)^\lambda\\&\leqslant\Sigma\left\{\alpha\left(\frac{a}{\Sigma a}\right)+\beta\left(\frac{b}{\Sigma b}\right)+\cdots+\lambda\left(\frac{l}{\Sigma l}\right)\right\}\\&=\alpha\Sigma\frac{a}{\Sigma a}+\beta\Sigma\frac{b}{\Sigma b}+\cdots+\lambda\Sigma\frac{l}{\Sigma l}\\&=\alpha\cdot1+\beta\cdot1+\cdots+\lambda\cdot1=1.\end{aligned}$$

等号成立的条件是$\dfrac{a_\nu}{\Sigma a_\nu}=\dfrac{b_\nu}{\Sigma b_\nu}=\cdots=\dfrac{l_\nu}{\Sigma l_\nu}(\nu=1,\ \cdots,\ n)$, 即$(a)$, $(b),\cdots,(l)$皆成比例.

45. 设$(a),(b),\cdots,(l)$内各数均不为零, 且各组并非皆成比例. 则

$$G(a)+G(b)+\cdots+G(l)<G(a+b+\cdots+l).$$

46. 设 $r,\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ 皆为正数, 且 $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$. 试证

$$M_r(ab\cdots l)\leqslant M_{r/\alpha}(a)M_{r/\beta}(b)\cdots M_{r/\lambda}(l).$$

47. 设 k 和 k' 为二共轭实数，即$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1 \quad (k, k' \neq 0, 1)$. 则

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^k\right)^{1/k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^{k'}\right)^{1/k'} \quad (k>1),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \geqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^k\right)^{1/k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^{k'}\right)^{1/k'} \quad (k<1).$$

第一个不等式中的等号当且仅当(a^k)和$(b^{k'})$成比例时适用，第二个不等式中的等号除了当(a^k)和$(b^{k'})$成比例时适用之外，尚对(ab)内各数全为零的情形适用，此外不等号是严格的.

[注意] 命题 45, 46 和47的两式均可由命题44得出. 事实上，倘若把 $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ 看成权 $q_1, q_2, \cdots, q_n$, 把 $a_1, b_1, \cdots, l_1$ 看成组(a), 把 $a_2, b_2, \cdots, l_2$ 看成组(b), $\cdots$, 把 $a_n, b_n, \cdots, l_n$ 看成组(l), 即得命题 45. 而倘若把(a), (b), $\cdots$, (l)分别看成$(qa^{\tau/\alpha})$, $(qb^{\tau/\beta})$, $\cdots$, $(ql^{\tau/\lambda})$, 即得命题 46. 又把命题 44 应用于(a^k), $(b^{k'})$两个组并把 α, β 分别看作$\frac{1}{k}, \frac{1}{k'}$, 即得命题 47 的第一式; 应用于$(ab)$, $(b^{k'})$两个组并把 α, β 分别看作 k 和 $1-k$, 由于

$$(a_\nu b_\nu)^k (b_\nu^{k'})^{1-k} = a_\nu^k b_\nu^k b_\nu^{\frac{k}{k-1}(1-k)} = a_\nu^k.$$

且因为 k 与 k' 中至少有一个为正，故不妨设 $k>0$, 所以得

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^k \leqslant \left(\sum_{1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^k \left(\sum_{1}^{n} b_\nu^{k'}\right)^{1-k}.$$

显然这就是命题 47 的第二式. 另外，命题 47 的第二式亦可化归第一式. 命题 47 的第一式最为常用，通常所谓赫尔特不等式多是指它而言. 而显然，命题 26 的柯西不等式是它的一个特例.

48. 设(a), (b)为任意两组复数，又 $k>1$, k' 与 k 共轭. 则

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right| \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^k\right)^{1/k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^{k'}\right)^{1/k'}$$

49. 设 $k>1$, k' 与 k 共轭, B 为一正的常数. 则使

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^k \leqslant A$$

成立的充要条件为: 对一切满足 $\sum b_\nu^{k'} \leqslant B$ 的(b)皆有

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \leqslant A^{1/k} B^{1/k'}.$$

［证］ 条件的必要性由赫尔特不等式立刻得到. 关于条件充分性的结论可看作赫尔特不等式的逆命题. 今用反证法证 明 之. 倘若$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^k > A$. 则可适当选取 b_ν, 使

$$b_\nu^{k'}/a_\nu^k = \text{常数}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^{k'} = B.$$

如是由命题 47 得出

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^k\right)^{1/k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^{k'}\right)^{1/k'} > A^{1/k} B^{1/k'}.$$

此与原设条件不合. 故必$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^k \leqslant A$.

50. 设 $r<s$. 则 $M_r(a) \leqslant M_s(a)$.

［证］ 先设 $0<r<s$. 此时可令 $r=\alpha s$, $0<\alpha<1$. 于是

$$\sum q a^r = \sum q^\alpha a^{\alpha s} \cdot q^{1-\alpha} \leqslant (\sum q a^s)^\alpha (\sum q)^{1-\alpha} = (\sum q a^s)^\alpha,$$

这里 $\sum q = 1$. 从而

$$(\sum q a^r)^{1/r} \leqslant (\sum q a^s)^{\alpha/r} = (\sum q a^s)^{1/s}.$$

再设 $r=0<s$. 此时由命题 40, 43 可知

$$(M_0(a))^s = (\lim_{r\to 0} M_r(a))^s = (G(a))^s = G(a^s) \leqslant A(a^s)$$
$$= (M_s(a))^s.$$

最后, 当 $r<s<0$ 及 $r<s=0$ 时, 根据命题 37 中之一等式 $M_{-r}(a) = (M_r(a^{-1}))^{-1}$, 此最后情形即可转化为开始讨论的两种

情形.

51. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数, 又 $\alpha<\beta$. 则

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}\leqslant\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta},$$

式中的等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时适用.

52. 设 a_k, b_k, c_k 均为正数, 试证不等式

$$(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n)^3$$
$$\leqslant(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3)(b_1^3+b_2^3+\cdots+b_n^3)$$
$$(c_1^3+c_2^3+\cdots+c_n^3).$$

53. 求证若 $x+y+z=6$, 则必有 $x^2+y^2+z^2\geqslant12$, 这里 x, y, z 皆为非负.

[提示] 于命题 51 取 $a_1=x, a_2=y, a_3=z, \alpha=1$ 及 $\beta=2$.

54. 求证若 x, y, z 为满足 $x^2+y^2+z^2=8$ 的正数, 则

$$x^3+y^3+z^3\geqslant16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

55. (利雅普诺夫不等式)设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为不全相等的正数. 若 $0<r<s<t$, 则

$$(M_s(a))^s<\{(M_r(a))^r\}^{\frac{t-s}{t-r}}\{(M_t(a))^t\}^{\frac{s-r}{t-r}}.$$

(利雅普诺夫, A. M. Ляпунов, 1857—1918.)

[证] 置 $s=r\alpha+t(1-\alpha)$, $0<\alpha<1$. 则所证不等式变成

$$\Sigma qa^s<(\Sigma qa^r)^\alpha(\Sigma qa^t)^{1-\alpha}.$$

这个不等式可由将赫尔特不等式(命题 44)应用于(qa^r)和(qa^t)两个组而得到. 由于一切 a 不全等, 故(qa^r), (qa^t)不成比例, 从而不等式是严格的.

[注意] 如令 $\phi(s)=\ln M_s^s$, 则利雅普诺夫不等式亦可改写作

$$\frac{t-s}{t-r}\phi(r)+\frac{s-r}{t-r}\phi(t)>\phi(s),$$

$$s=\frac{t-s}{t-r}r+\frac{s-r}{t-r}t.$$

凡具备上述性质的函数 $\phi(s)$即称为(严格)下凸函数，因为这时 $y=\phi(x)$的图象是平面上的一条(严格)下凸曲线. 据此定义，可知利雅普诺夫不等式亦即表明 $\ln M_s^s=s\ln M_s(a)$为 s 的(严格)下凸函数.

56. 对不全等的 a，写 $S_r=(\Sigma a^r)^{1/r}$. 试证当 $0<r<s<t$ 时有

$$S_s^s\leqslant(S_r^r)^{\frac{t-s}{t-r}}(S_t^t)^{\frac{s-r}{t-r}}$$

［提示］ 可应用利雅普诺夫不等式. 事实上，$S_r=n^{1/r}M_r$.

57. 设$(a),(b),\cdots,(l)$中各数皆为正，又 $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ 为一组正数且 $\alpha+\beta+\cdots+\lambda>1$. 则

$$\sum_{k=1}^n a_k^\alpha b_k^\beta\cdots l_k^\lambda\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^\alpha\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^\beta\cdots\left(\sum_{k=1}^n l_k\right)^\lambda \quad \text{(Jensen)}$$

［提示］ 应用命题 44 和 31 即可推得.

58. (闵科夫斯基不等式)设 r 异于 0 及 1. 则

$$\left\{\sum_{k=1}^n(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r\right\}^{1/r}\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^r\right)^{1/r}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^n l_k^r\right)^{1/r}\quad(r>1),$$

$$\left\{\sum_{k=1}^n(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r\right\}^{1/r}\geqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^r\right)^{1/r}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^n l_k^r\right)^{1/r}\quad(r<1).$$

以上二式中任何一式的等号，在 $r>0$ 时当且仅当$(a),(b),\cdots,(l)$两两互成比例时适用， 在 $r<0$ 时还对至少有一个 k 使 $a_k=b_k=$

$\cdots = l_k = 0$ 的情形适用，此外不等式是严格的.

(闵科夫斯基，H. Minkowski, 1864—1909.)

［证］ 本命题可由赫尔特不等式(命题 47)推出来. 例如当 $r > 1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\sum(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r \quad (\text{写 } s_k = a_k+b_k+\cdots+l_k)\\
&\quad = \sum a_k s_k^{r-1} + \sum b_k s_k^{r-1} + \cdots + \sum l_k s_k^{r-1}\\
&\quad = \sum (a_k^r)^{\frac{1}{r}} (s_k^r)^{\frac{r-1}{r}} + \cdots + \sum (l_k^r)^{\frac{1}{r}} (s_k^r)^{\frac{r-1}{r}}\\
&\quad \leqslant \left(\sum a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum s_k^r\right)^{\frac{r-1}{r}} + \cdots + \left(\sum l_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum s_k^r\right)^{\frac{r-1}{r}}\\
&\quad = \left\{\left(\sum a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} + \cdots + \left(\sum l_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\}\\
&\qquad\quad \left\{\sum (a_k+b_k+\cdots+l_k)^r\right\}^{\frac{r-1}{r}}.
\end{aligned}$$

把等式右端的公因子除左端即得第一个不等式.

59. 设 $r > 0$ 且 $r \neq 1$. 试证

$$\sum(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r > \sum a_k^r + \sum b_k^r + \cdots + \sum l_k^r \quad (r > 1),$$

$$\sum(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r < \sum a_k^r + \sum b_k^r + \cdots + \sum l_k^r \quad (0 < r < 1).$$

此地 $(a_k, b_k, \cdots, l_k) \neq (0, 0, \cdots, 0) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$.

60. 设 $r > 0$，命 $R = \min\{1/r, 1\}$. 则

$$\begin{aligned}\left\{\sum(a_k+b_k+\cdots+l_k)^r\right\}^R \leqslant &\left(\sum a_k^r\right)^R + \left(\sum b_k^r\right)^R + \cdots\\ &+ \left(\sum l_k^r\right)^R.\end{aligned}$$

［提示］ 这是命题 58 和 59 的综合题.

61. 试证不等式

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}\\ &\qquad \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.\end{aligned}$$

62. 若 $(a_k - a_j)(b_k - b_j) \geqslant 0$ 对一切 $k, j = 1, 2, \cdots, n$ 皆成立，即称 (a) 与 (b) *成似序*，若相反的不等式常成立，即称*成反序*. 今设 (a) 与 (b) 成似序，且 $r > 0$. 则当 (a) 和 (b) 都不是常数列时，有

$$M_r(a)M_r(b) < M_r(ab). \qquad \text{(Чебышев)}$$

［提示］ 此为命题 28 的一般形式，其证法亦类似：

$$\Sigma p\Sigma pa^r b^r-\Sigma pa^r\Sigma pb^r$$

$$=\frac{1}{2}\Sigma\Sigma p_k p_j(a_k^r-a_j^r)(b_k^r-b_j^r)>0.$$

63. 本题和以下二题中的三个平均值是就加权均匀者而言，即 $A(a)=\frac{1}{n}\Sigma a_k$, $H(a)=n\Big/\Sigma\frac{1}{a_k}$, $G(a)=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$. 试证，下列关系

$$\frac{1}{2}(A(a)+H(a))\geqslant G(a),$$

当 $n=2$ 时成立而当 $n\geqslant 3$ 时未必成立.

64. 试证对一切不全相等的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 而言，常有不等式

$$1<\frac{A(a)-H(a)}{A(a)-G(a)}<n.$$

65. 试证当 $n\geqslant 2$ 时成立不等式

$$(A(a))^{n-1}H(a)\geqslant(G(a))^n\geqslant A(a)(H(a))^{n-1}. \quad \text{(Sierpinski)}$$

［证］ 当 $n=2$ 时这是等式. 今设 $n>2$. 记

$$A_d=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_k,\quad H_d=(n-1)\Big/\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k},$$

$$G_d=(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}.$$

则

$$A=\frac{n-1}{n}A_d+\frac{a_n}{n},\quad H=\frac{n}{\frac{n-1}{H_d}+\frac{1}{a_n}}$$

$$G^n=a_nG_d^{n-1}.$$

为证左边的不等式(右边亦类似)，命

$$f(a_n)=(n-1)\ln A(a)+\ln H(a)-\ln(G(a))^n$$

$$=(n-1)\ln((n-1)A_d+a_n)-\ln\left(\frac{n-1}{H_d}+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$-\ln a_n-\ln G_d^{n-1}-(n-2)\ln n.$$

容易验证当 $x>x_0$ 时 $f'(x)>0$ 而当 $x<x_0$ 时 $f'(x)<0$，这里 $x_0=\frac{(n-1)A_d-H_d}{n-2}$. 因此 $f(a_n)\geqslant f(x_0)$. 这就给出不等式

$$\frac{A^{n-1}H}{G^n}\geqslant\left(\frac{(n-1)^2A_d-H_d}{n(n-2)}\right)^{n-2}\frac{H_d}{G_d^{n-1}}\geqslant\frac{A_d^{n-2}H_d}{G_d^{n-1}}.$$

由是命题依完全归纳法原理而得证.

66. 设 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，$0<y_1<y_2<\cdots<y_n$. 试证不等式

$$\Sigma x_k^2y_k^2/\Sigma x_ky_k>\Sigma x_k^2/\Sigma x_k \qquad \text{(Laplace)}$$

[提示] 用归纳法来证明.

67. 设 $0\leqslant a_k\leqslant 1\quad(k=1,2,\cdots,n)$. 记 $S=\Sigma a_k$. 试证不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\geqslant\frac{nS}{n-S}. \qquad \text{(Shapiro)}$$

[证] 这实际上是切比晓夫不等式（命题 28）的特例. 不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，可见 $\frac{a_k}{1-a_k}$ 与 $1-a_k$ 成反序，故应用命题28（其中不等号应反向）立即得到

$$nS=n\Sigma a_k=n\Sigma\left(\frac{a_k}{1-a_k}\right)(1-a_k)$$
$$\leqslant\left(\Sigma\frac{a_k}{1-a_k}\right)(\Sigma(1-a_k))=\left(\Sigma\frac{a_k}{1-a_k}\right)(n-S).$$

上式两端除以 $n-S$ 就是命题中的不等式.

§3. 积分不等式、无穷不等式及函数的凸性

对应于上节中所叙述的各种平均值，在这里我们可以给连续函数（或可积分函数）规定出若干相类似的平均值. 其差别不过是把和式改成积分就是了. 例如，若设 $f(x)$ 为定义在区间 $[x_1,x_2]$ 上

的一个下界为正值的可积函数，则 f 的算术平均值、几何平均值、调和平均值以及 r 次幂平均值可分别定义如下($x_1<x_2$，下同)：

$$A(f)=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx,$$

$$G(f)=\exp\left\{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} \ln f(x)dx\right\},$$

$$H(f)=\frac{x_2-x_1}{\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{f(x)}},$$

$$M_r(f)=\left\{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} (f(x))^r dx\right\}^{1/r}.$$

这些平均值都是上一节所述平均值的极限情形．例如 $M_r(f)$就是一种加权平均值的极限[1)]：

$$M_r(f)=\lim_{\Delta\xi\to 0}\left\{\frac{\sum\Delta\xi_\nu(f(\xi_\nu^*)^r)}{\sum\Delta\xi_\nu}\right\}^{1/r}=\lim_{\Delta\xi\to 0} M_r(f(\xi^*),\Delta\xi).$$

从有穷不等式导出积分不等式及无穷不等式时，主要系根据这样一个原则，即通过极限手续时不等式中的不等号至多只能添加等号，而不能改变不等号所指示的大小方向．例如，若 $S(n)<P(n)$，且$\lim S(n)$，$\lim P(n)$都存在，则必有 $\lim S(n)\leqslant\lim P(n)$．

有一系列的不等式，均与凸性函数有关．设 $\phi(x)$是定义在区间$[x_1,x_2]$上的一个函数．要是对于$[x_1, x_2]$中的任意两个值 t_1，t_2常保持

$$\phi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\leqslant\frac{\phi(t_1)+\phi(t_2)}{2},$$

我们就称 $\phi(x)$是一个下凸函数．如果不等号反其方向，即名之为上凸函数．要是式中的等号仅对 $t_1=t_2$ 成立，则分别称之为严格

1）因而这里所说的积分系指黎曼意义的，虽然本节所论的不等式大多对勒贝格积分也依然有效．

下凸函数与严格上凸函数．关于凸性函数的理论基础主要是由琴生于 1906 年左右所奠立.

68. 设 $f(x)$在$[x_1, x_2]$上的下界为正: $\inf f(x)>0$. 则显然有

$$\frac{1}{G(f)}=G\left(\frac{1}{f}\right),\quad \frac{1}{H(f)}=A\left(\frac{1}{f}\right),$$

$$A(f+g)=A(f)+A(g),$$

$$G(f\cdot g)=G(f)\cdot G(g),\quad \ln G(f)=A(\ln f).$$

69. 设 $f(x)$是$[x_1, x_2]$上的下界为正的可积函数．则

$$H(f)\leqslant G(f)\leqslant A(f).$$

［提示］ 由有穷不等式 $M_{-1}(a)\leqslant M_0(a)\leqslant M_1(a)$ 经过极限手续即可获得.

70. 设 $f(x)$是$[x_1, x_2]$上的正值连续函数(或下界为正的可积函数), 则当 $r<s$ 时有

$$\left(\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}(f(x))^r dx\right)^{1/r}\leqslant\left(\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}(f(x))^s dx\right)^{1/s}.$$

71. (布涅可夫斯基不等式)设 $f(x)$和 $g(x)$都是$[x_1, x_2]$上的可积函数．则

$$\left(\int_{x_1}^{x_2}|f(x)g(x)|dx\right)^2\leqslant\int_{x_1}^{x_2}f(x)^2dx\int_{x_1}^{x_2}g(x)^2dx.$$

(布涅可夫斯基, V. J. Buniakowski, 1804—1889.)

72. (赫尔特不等式)设 $f(x)$和 $g(x)$为可积函数, 又设 p 和 q 为一对共轭正数: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则

$$\int_{x_1}^{x_2}|f(x)g(x)|dx\leqslant\left(\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_{x_1}^{x_2}|g(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

73. 设 $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ 为一组正数, 而 $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$. 则

$$\int_{x_1}^{x_2}f^\alpha g^\beta\cdots h^\lambda dx$$

$$\leqslant\left(\int_{x_1}^{x_2} f\,dx\right)^{\alpha}\left(\int_{x_1}^{x_2} g\,dx\right)^{\beta}\cdots\left(\int_{x_1}^{x_2} h\,dx\right)^{\lambda},$$

此处 $f(x), g(x), \cdots, h(x)$ 皆是下界为正的可积函数.

[证] 由关于平均值的基本不等式(命题43)可知

$$\frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f^{\alpha}g^{\beta}\cdots h^{\lambda}\,dx}{\left(\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f\,dx\right)^{\alpha}\left(\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} g\,dx\right)^{\beta}\cdots\left(\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} h\,dx\right)^{\lambda}}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f\,dx}\right)^{\alpha}\left(\frac{g}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} g\,dx}\right)^{\beta}\cdots\left(\frac{h}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} h\,dx}\right)^{\lambda}dx$$

$$\leqslant\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\alpha f}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f\,dx}+\frac{\beta g}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} g\,dx}+\cdots+\frac{\lambda h}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} h\,dx}\right)dx=1.$$

74. 试由命题 73 导出命题 72 并从而导出命题 66.

75. (闵科夫斯基不等式) 设 $p>1$. 又设 $f(x)$和 $g(x)$均为可积函数. 则

$$\left(\int_{x_1}^{x_2} |f(x)+g(x)|^{p}dx\right)^{1/p}$$

$$\leqslant\left(\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|^{p}dx\right)^{1/p}+\left(\int_{x_1}^{x_2} |g(x)|^{p}dx\right)^{1/p}.$$

76. 试将命题 75 写成更一般的形式, 并证明当 $0<p<1$ 时有

$$\left(\int_{x_1}^{x_2} (f+g+\cdots+h)^{p}dx\right)^{1/p}\geqslant\left(\int_{x_1}^{x_2} f^{p}dx\right)^{1/p}+\cdots$$

$$+\left(\int_{x_1}^{x_2} h^{p}dx\right)^{1/p},$$

其中 $f, g, \cdots, h$ 都是下界为正的可积函数.

77. 试将利雅普诺夫不等式 $M_s^s\leqslant(M_r^r)^{\frac{t-s}{t-r}}(M_t^t)^{\frac{s-r}{t-r}}$ $(0<r<s<t)$转变为相应的积分不等式.

78. 若$(f(x_1)-f(x_2))(g(x_1)-g(x_2))\geqslant 0$ 对一切 x_1 和x_2 均成立, 则称 f 和 g 成似序. 倘反向的不等式常成立, 则称成反序.

求证当 f 和 g 成似序时，有

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

又若 f 和 g 成反序，则不等号反向. (Чебышев)

79. 试观察何以琴生不等式

$$S_s(a)\leqslant S_r(a)\quad(0<r<s)$$

不可能有相应的积分不等式.

[提示] 注意许多有相应积分不等式的有穷不等式，其中符号Σ在不等式两端出现的次数(或幂)常常是齐次的. 例如下列不等式的两端，所含Σ的幂次均为2:

$$\left(\frac{1}{n}\Sigma a_\nu b_\nu\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{n}\Sigma a_\nu^2\right)\left(\frac{1}{n}\Sigma b_\nu^2\right).$$

也正因为这样，对于每一个和Σ总可以附乘一个因子$\frac{1}{n}=\Delta x$，而当 $n\to\infty$(即 $\Delta x\to 0$)时也就得到了积分形式的不等式.

80. 试从柯西的以及赫尔特的有穷不等式导出其相应的无穷不等式.

81. 设 $r>1$, $q_n>0$, $p_n>0$, $a_{mn}>0$. 则

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}q_n\left(\sum_{m=1}^{\infty}p_m a_{mn}\right)^r\right\}^{1/r}\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}p_m\left(\sum_{n=1}^{\infty}q_n a_{mn}^r\right)^{1/r}$$

(Minkowski)

[证] 由同名的有穷不等式(命题58)得

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n}q_\nu\left(\sum_{\mu=1}^{m}p_\mu a_{\mu\nu}\right)^r\right\}^{1/r}\leqslant\sum_{\mu=1}^{m}p_\mu\left(\sum_{\nu=1}^{n}q_\nu a_{\mu\nu}^r\right)^{1/r}.$$

令 $n\to\infty$, $m\to\infty$, 即得本命题.

82. 设(a): $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$; (b); (p)是三列正数的无穷序列. 试根据切比晓夫不等式证明: (i) 若(a)与(b)成似序，则$\sum_{n=1}^{\infty}p_n a_n b_n$

和$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$的收敛性蕴含$\sum_{n=1}^{\infty} p_n a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} p_n b_n$的收敛性；(ii) 若$(a)$与$(b)$成反序，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} p_n b_n$的收敛性蕴含$\sum_{n=1}^{\infty} p_n a_n b_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$的收敛性.

83. 设$f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$为正值连续函数. 试证

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\geqslant (b-a)^2.$$

［证］ 因$f(x)$与$f(x)^{-1}$成反序，故应用切比晓夫不等式，

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(x)^{-1}dx\geqslant (b-a)\int_a^b f(x)\cdot f(x)^{-1}dx=(b-a)^2.$$

84. 设$f(x)$和$g(x)$皆为$[a,b]$上的正值可积函数，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx\geqslant \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}dx\right)^2.$$

［证］ 事实上，我们有

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx-\left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}dx\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\left(\sqrt{f(x)g(x)}-\sqrt{f(y)g(y)}\right)^2 dxdy\geqslant 0.$$

85. (凸函数的基本不等式)设$\varphi(t)$为区间$[a,b]$上的严格下凸函数，即对$t_1,t_2\in[a,b]$，$t_1\neq t_2$常有

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}.$$

则对于$[a,b]$中任意一组不全相同的值$t_1,t_2,\cdots,t_n$，必有下列不等式成立:

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\cdots+\varphi(t_n)}{n}.$$

［证］ 本命题可利用柯西推理法证明. 首先，反复应用下凸函数的定义m次，则由归纳法可得

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_{2^m}}{2^m}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\cdots+\varphi(t_{2^m})}{2^m}.$$

此处 $t_1, t_2, \cdots, t_{2^m}$为任意一组不全相同的数值, m 为任意正整数. 今设 n 为任一正整数, 令 m 为使 $2^m>n$ 的最小整数. 置 $S=\frac{1}{n}\ (t_1+t_2+\cdots+t_n)$. 则

$$\varphi(S)=\varphi\left(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n+(2^m-n)S}{2^m}\right)$$

$$<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\cdots+\varphi(t_n)+(2^m-n)\varphi(S)}{2^m}.$$

由此得 $n\varphi(S)<\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\cdots+\varphi(t_n)$. 此种证明过程即称为柯西推理方法.

[另证] 本题亦可利用倒推归纳法来证. 所谓倒推归纳法, 其原理是这样: 设 $P(n)$是一个与自然数 n 相联系的命题. 假定(i) 由 $P(n)$之真理性可推出 $P(n-1)$亦成真理; (ii) 已知 $P(n)$对无限多个 n 是真理. 如是 $P(n)$对一切自然数 n 皆成真理.

今假定命题 85 对某个 n 为真理, 即 $n\varphi(S)<\varphi(t_1)+\cdots+\varphi(t_{n-1})+\varphi(t_n)$, 其中 $nS=t_1+\cdots+t_n$, 而 $t_1, \cdots, t_n$为任意 n 个不全相等的值. 由是, 对于任意 $n-1$ 个不全相等的值 $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 而言, 可令$t_1+\cdots+t_{n-1}=(n-1)\sigma$, $t_n=\sigma$. 从而由 $n\varphi(\sigma)<\varphi(t_1)+\cdots+\varphi(t_{n-1})+\varphi(\sigma)$即得出

$$(n-1)\varphi(\sigma)<\varphi(t_1)+\varphi(t_2)+\cdots+\varphi(t_{n-1}).$$

这就表明命题对 $n-1$ 为真理. 而前已证明当 $n=2^m(m=1, 2, \cdots)$ 时命题为真理, 故而推知命题对一切大于 1 的自然数皆成真理.

86. 设 $f(x)$是区间$[a, b]$上的可积函数, 且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 又设 $\varphi(t)$是区间$[m, M]$上连续的下凸函数. 则

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi[f(x)]dx.$$

若 $\varphi(t)$为上凸函数, 则式中不等号反向.

［提示］ 由定积分之定义，于下式两端令 $n\to\infty$ 取极限即得：

$$\varphi\left(\frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots+f_{nn}}{n}\right)\leqslant\frac{\varphi(f_{1n})+\varphi(f_{2n})+\cdots+\varphi(f_{nn})}{n},$$

此地 $f_{kn}=f(x_{kn})=f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$, $\Delta x_{kn}=\frac{1}{n}(b-a)\to 0$ $(n\to\infty)$.

87. 设 $\varphi(t)$ 在区间 (m,M) 上二次可微，且 $\varphi''(t)\geqslant 0$. 则 $\varphi(t)$ 必为 (m,M) 上的下凸函数. 又若 $\varphi''(t)>0$, 则 $\varphi(t)$ 必为严格下凸函数.

88. $\varphi(t)=t^k(0<k<1)$, $\varphi(t)=\ln t$ 均为 $(0,\infty)$ 上的严格上凸函数. $\varphi(t)=t^k(k<0$ 或 $k>1)$, $\varphi(t)=t\ln t$ 均为 $(0,\infty)$ 上的严格下凸函数. 又 $\varphi(t)=\ln(1+e^t)$, $\varphi(t)=\sqrt{c^2+t^2}$ $(c\neq 0)$ 均为 $(-\infty,\infty)$ 上的严格下凸函数.

89. 设 $\varphi(t)$ 为 (m,M) 上的连续凸函数，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为任意一组正数. ，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 为 (m,M) 内的任意一组数. 于是随 $\varphi(t)$ 之为下凸或上凸而相应地有

$$\varphi\left(\frac{p_1t_1+p_2t_2+\cdots+p_nt_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)\leqslant$$

$$\text{或}\geqslant\frac{p_1\varphi(t_1)+p_2\varphi(t_2)+\cdots+p_n\varphi(t_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

［提示］ 改写 $p_k/(p_1+p_2+\cdots+p_n)=\theta_k$, 则可选取 n 个具有公分母的有理数序列 q_{km} 使 $q_{km}\to\theta_k$ $(m\to\infty)$. 又对于有理数序列而言，由命题 85 可得

$$\varphi(q_{1m}t_1+q_{2m}t_2+\cdots+q_{nm}t_n)\leqslant$$

$$\text{或}\geqslant q_{1m}\varphi(t_1)+q_{2m}\varphi(t_2)+\cdots+q_{nm}\varphi(t_n).$$

因此利用 φ 的连续性，通过 $m\to\infty$ 的极限手续即可得

$$\varphi(\theta_1t_1+\theta_2t_2+\cdots+\theta_nt_n)\leqslant$$

$$\text{或}\geqslant\theta_1\varphi(t_1)+\theta_2\varphi(t_2)+\cdots+\theta_n\varphi(t_n).$$

90. 设连续函数 $\varphi(t)$为下凸或上凸的定义为: 对任意两个其和为 1 的正数 θ_1, θ_2 以及任意 $t_1, t_2 \in [m, M]$, 相应地有

$$\varphi(\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2) \leqslant \text{或} \geqslant \theta_1 \varphi(t_1) + \theta_2 \varphi(t_2).$$

试用数学归纳法证明命题 89.

91. (琴生不等式)设 $f(x), p(x)$为$[a, b]$上的可积函数, 而 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $p(x) \geqslant 0$, $\int_a^b p(x)dx > 0$. 则随连续函数 $\varphi(t)$ $(m \leqslant t \leqslant M)$之为下凸或上凸而相应地有

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \leqslant \text{或} \geqslant \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

92. 试利用凸性函数的原理推证利雅普诺夫不等式.

[解] 由柯西不等式知

$$(\Sigma p a^s)^2 \leqslant (\Sigma p a^r)(\Sigma p a^t) \quad \left(s = \frac{1}{2}(r+t)\right).$$

即$(M_s^s)^2 \leqslant M_r^r M_t^t$. 亦即 $\ln M_s(a)^s \leqslant \frac{1}{2}\{\ln M_r(a)^r + \ln M_t(a)^t\}$. 由是据定义可知 $\ln M_s(a)^s$ 为 s 的下凸函数. 显然这是连续函数$(s>0)$, 从而应用命题 89 便得到利雅普诺夫不等式(命题55, 但带等号.)

93. 设 $\varphi(t)$在区间(m, M)上二次可微, 且 $\varphi''(x)>0$. 则

$$\varphi\left(\frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + \cdots + p_n t_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right) \leqslant \frac{p_1\varphi(t_1) + p_2\varphi(t_2) + \cdots + p_n\varphi(t_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n},$$

此处 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 均为正数, 而上式中的等号当且仅当 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$时适用.

[提示] 把 $\varphi(t_\nu)$对 $t_0 = (p_1 t_1 + \cdots + p_n t_n)/(p_1 + \cdots + p_n)$泰勒展开可以获得严格的不等式.

94. 试证不等式

$$\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{\dfrac{p_1}{a_1}+\dfrac{p_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{p_n}{a_n}}<\exp\left(\frac{p_1\ln a_1+p_2\ln a_2+\cdots+p_n\ln a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)$$

$$<\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

此处 $p_1, p_2, \cdots, p_n$; $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正数，而 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全相等.

［提示］ 于不等式各端取对数，并注意函数 $-\ln t$ 的下凸性及 $\ln t$ 的上凸性.

95. 试证不等式

$$\frac{\int_a^b p(x)dx}{\int_a^b \dfrac{p(x)}{f(x)}dx}\leqslant\exp\left(\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right)\leqslant\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx},$$

此处 $p(x)\geqslant 0, \int_a^b p(x)dx>0, \inf f(x)>0$.

［注意］ 本命题为命题 69 的扩充形式.

96. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为 $[a, b]$ 上的正值连续函数. 则

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(x)+g(x))dx\right)$$

$$\geqslant\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right)+\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln g(x)dx\right).$$

亦即 $G(f+g)\geqslant G(f)+G(g)$. (Blaschke)

［证］ 可通过探讨适当的函数的凸性来证明. 置

$$\varphi(t)=\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln[tf(x)+(1-t)g(x)]dx\right)\quad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

则由布涅可夫斯基不等式(命题 71)容易得出

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)}=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b 1\cdot\frac{f(x)-g(x)}{tf(x)+(1-t)g(x)}dx\right)^2$$

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{f(x)-g(x)}{tf(x)+(1-t)g(x)}\right)^2 dx\leqslant 0.$$

因此 $\varphi(t)$为上凸函数，从而有下列不等式：

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant\frac{\varphi(1)+\varphi(0)}{2}.$$

以 $\varphi(t)$的定义代入此式，即得所要证的结论.

97. 设 $\varphi(t)$是区间$[m, M]$上连续的下凸函数. 则

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)dt\leqslant\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}$$

$$(m\leqslant t_1<t_2\leqslant M). \qquad \text{(Hadamard)}$$

98. 设 $\varphi(t)$是区间$[m, M]$上连续的下凸函数. 又设 $p_k>0$, $m\leqslant t_k\leqslant M(k=1, 2, \cdots, n)$, $1\geqslant\beta_1>\alpha_1\geqslant\cdots\geqslant\beta_{n-1}>\alpha_{n-1}\geqslant 0$,

$$\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}=1-\frac{p_1+\cdots+p_i}{p_1+\cdots+p_n}\quad(i=1, 2, \cdots, n-1).$$

则

$$\varphi\left(\frac{p_1t_1+p_2t_2+\cdots+p_nt_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1}(\beta_i-\alpha_i)}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}}\varphi\left(t_1+\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)x_i\right)dx_1\cdots dx_{n-1}$$

$$\leqslant\frac{p_1\varphi(t_1)+p_2\varphi(t_2)+\cdots+p_n\varphi(t_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

［证］ 设 $\alpha_i<x_i<\beta_i\quad(i=1, \cdots, n-1)$. 由于

$$\begin{aligned}t&=t_1+\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)x_i\\&=(1-x_1)t_1+(x_1-x_2)t_2+\cdots\\&\qquad+(x_{n-2}-x_{n-1})t_{n-1}+x_{n-1}t_n\\&=q_1t_1+q_2t_2+\cdots+q_nt_n,\ q_1+q_2+\cdots+q_n=1,\ q_i\geqslant 0.\end{aligned}$$

由命题 89 得

$$\varphi(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}q_i\varphi(t_i)$$

$$=\varphi(t_1)+\sum_{i=1}^{n-1}(\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i))x_i.$$

积分之，即得命题中右边的不等式. 为证左边的不等式，我们注意下凸连续函数的一个直观性质：过其对应图象曲线上的每一点，都可以做一条直线(叫做支撑线)，使曲线没有在此直线之下的部分(这个性质可以严格证明). 支撑线性质可以解析地说成：对任何 $\xi\in[m, M]$，存在 λ 使对一切 $t\in[m, M]$ 有

$$\varphi(t)\geqslant\varphi(\xi)+\lambda(t-\xi).$$

于上式置 $\xi=(p_1t_1+p_2t_2+\cdots+p_nt_n)/(p_1+p_2+\cdots+p_n)$, $t=t_1+\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)x_i$，积分之即得命题左边的不等式.

［注意］ 命题 98 是阿达玛(J. Hadamard, 1865—1963)不等式的拓广. 事实上，置 $n=2$ 并经过替换可得不等式

$$\varphi\left(\frac{p_1t_1+p_2t_2}{p_1+p_2}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{s_2-s_1}\int_{s_1}^{s_2}\varphi(s)ds\leqslant\frac{p_1\varphi(t_1)+p_2\varphi(t_2)}{p_1+p_2},$$

此地 $m\leqslant t_1\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant t_2\leqslant M$，且 $\frac{s_1+s_2}{2}=\frac{p_1t_1+p_2t_2}{p_1+p_2}$, p_1、$p_2>0$.

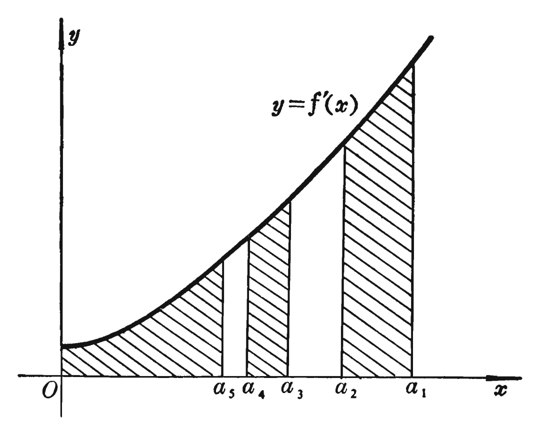
§4. 关于不等式的补充命题及杂题

99. 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant0$, $f(0)=0$, $f'(0)\geqslant0$. 又设 $f'(x)$ 为单调增加的连续函数. 则

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(a_k)\geqslant f\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right).$$

(Bellman)

［证］ 试观察下图：



题 99 图 $f(a_1)-f(a_2)+f(a_3)-f(a_4)+f(a_5)\geqslant f(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5)$.

可以见到 $f(a_1)-f(a_2)+f(a_3)-f(a_4)+f(a_5)$ 即等于图中绘有斜线的三块面积之和. 另方面，$f(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5)$即等于直线 $x=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5$ 及 x, y 两轴与曲线所围之面积. 故比较面积即可看出

$$f(a_1)-f(a_2)+f(a_3)-f(a_4)+f(a_5)$$
$$\geqslant f(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5).$$

显然上述推理具有一般性，其中 n 亦不必限于奇数. 此外还可以看出，如果 $f(x)$严格单调的话，则不等式中的等号仅当 $a_2=a_3$, $a_4=a_5$, …时成立.

100. 试证当 $r\geqslant 1$, $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$ 时成立不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k^r\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right)^r. \qquad \text{(Weinberger)}$$

101. (杨不等式)设$\phi(x)$是严格单调增加的连续函数($x\geqslant 0$)，$\phi(0)=0$. 又设 $\psi(x)$为 $\phi(x)$的反函数. 则对任意 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 成立不等式

$$a\cdot b\leqslant\int_0^a \phi(x)dx+\int_0^b\psi(x)dx,$$

式中等号当且仅当 $b=\phi(a)$ 时适用. (杨, W. H. Young, 1863—1942.)

[提示] 绘图比较面积便知.

102. 试证在命题 101 的条件下有不等式 $ab\leqslant a\phi(a)+b\psi(b)$ 成立.

103. 设连续函数 $f_\nu(x)$是非负的并且是单调增加的, 又设 $a_\nu\geqslant 0(\nu=1,2,\cdots,n)$. 若至少有一个 ν 使 $f_\nu(0)=0$, 则有下列不等式成立:

$$\prod_{\nu=1}^n f_\nu(a_\nu)\leqslant\sum_{\nu=1}^n\int_0^{a_\nu}\prod_{\mu\neq\nu}f_\mu(x)df_\nu(x),$$

当 $f_\nu(x)$都是严格单调增加时, 式中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时适用. (Oppenheim)

[证] 这是杨不等式的推广. 其证法如下: 定义 $F_\nu(x)=f_\nu(\mathrm{Min}\{x,a_\nu\})$, 则当 $0\leqslant x<\infty$ 时恒有 $F_\nu(x)\leqslant f_\nu(x)$. 记 $a=\mathrm{Max}\{a_1,\cdots,a_n\}$. 由于 $\Pi F_\nu(0)=0$, 故得

$$\begin{aligned}\Pi f_\nu(a_\nu)=\Pi F_\nu(a_\nu)&=\int_0^a d\{\Pi F_\nu(x)\}\\&=\sum_\nu\int_0^{a_\nu}\prod_{\mu\neq\nu}F_\mu(x)dF_\nu(x)=\sum_\nu\int_0^{a_\nu}\prod_{\mu\neq\nu}F_\mu(x)df_\nu(x)\\&\leqslant\sum_\nu\int_0^{a_\nu}\prod_{\mu\neq\nu}f_\mu(x)df_\nu(x).\end{aligned}$$

104. (阿达玛不等式)设 $A=\det[a_{ik}]$为 n 级行列式, 其中的元素均为实数且满足条件 $a_{k1}^2+a_{k2}^2+\cdots+a_{kn}^2=1\ (k=1,2,\cdots,n)$. 则必有不等式 $|A|\leqslant 1$ 成立.

[证] 可应用拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736—1813)不定乘数法来证. 显然此时条件方程为

$$\varphi_k=a_{k1}^2+a_{k2}^2+\cdots+a_{kn}^2-1=0 \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

以 λ_k 表不定乘数，置

$$F=A+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\lambda_k(a_{k1}^2+a_{k2}^2+\cdots+a_{kn}^2-1).$$

于是从方程

$$\frac{\partial F}{\partial a_{jk}}=\frac{\partial A}{\partial a_{jk}}+\lambda_j a_{jk}=0 \quad (j,k=1,2,\cdots,n)$$

得到 $A_{jk}+\lambda_j a_{jk}=0$，其中 A_{jk} 为 A 中元素 a_{jk} 所对应的余子式．于此组等式两端乘以 a_{jk} 并对 $k=1,2,\cdots,n$ 作和，则得

$$A+\lambda_j=0 \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

因之 $\lambda_j=-A$．亦即 $A_{jk}=Aa_{jk} \quad (j,k=1,2,\cdots,n)$．是故得到

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} Aa_{11} & \cdots & Aa_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Aa_{n1} & \cdots & Aa_{nn} \end{vmatrix}, \text{即 } A^{n-1}=A^{n+1}.$$

由于 A 的极大值和极小值必须适合上列方程，故不难推知 A 的极大值为 $+1$，极小值为 -1．因此 $|A|\leqslant 1$．

105. 设 $A=\det[a_ik]$ 为 n 级行列式，其中的元素均为实数且满足 $|a_{ik}|\leqslant M$．则有阿达玛不等式 $|A|\leqslant M^n n^{n/2}$ 成立．

［证］ 置 $s_k=a_{k1}^2+a_{k2}^2+\cdots+a_{kn}^2$，则 $|s_k|\leqslant nM^2$．从而

$$|A|\leqslant\sqrt{s_1 s_2\cdots s_n}\,|A^*|\leqslant\sqrt{s_1 s_2\cdots s_n}\leqslant M^n\cdot n^{n/2},$$

此处 $[A^*]$ 中的元素适合条件 $a_{k1}^{*2}+\cdots+a_{kn}^{*2}=1$，由命题 104 已知 $|A^*|\leqslant 1$．

106. 试略述柯西不等式，闵科夫斯基不等式及阿达玛不等式的几何意义．

［解］ 柯西不等式表明欧几里得(Euclid，公元前三世纪)空间中的任意二向量交角的余弦值不超过 1．例如设 $\vec{A}=(a_1,\cdots,a_n)$，$\vec{B}=(b_1,\cdots,b_n)$．则

$$\cos(\vec{A},\vec{B})=\frac{\sum a_k b_k}{\sqrt{\sum a_k^2}\sqrt{\sum b_k^2}}\leqslant 1.$$

一般的闵可夫斯基不等式则是将欧几里得空间中的三角形不等式推广到具有下列距离定义的距离空间:

$$\overline{P_1P_2}=(|x_1-x_2|^r+|y_1-y_2|^r+\cdots)^{1/r}\quad (r\geqslant 1).$$

阿达玛不等式表明 n 维欧几里得空间中各边长固定的平行多面体的体积以各边相互正交时最大.

107. 设 $a_{\mu\nu}\geqslant 0$ 满足 $\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}=\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}=1$. 又设 $x_\nu\geqslant 0$, $y_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}x_\nu$. 则

$$y_1y_2\cdots y_n\geqslant x_1x_2\cdots x_n \qquad \text{(Schur)}$$

[证] 由于 $\ln x$ 为$(0,\infty)$上的上凸函数, 故应用关于凸函数的琴生不等式得

$$\ln y_\mu=\ln\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}x_\nu\geqslant\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}\ln x_\nu,$$

$$\sum_{\mu=1}^{n}\ln y_\mu\geqslant\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}\ln x_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}\ln x_\nu.$$

从而得 $y_1y_2\cdots y_n\geqslant x_1x_2\cdots x_n$.

[注意] 本命题可述为: 各分量为非负的列向量 x 经线性变换

$$\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_\mu\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_\mu\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},$$

如果变换矩阵$[a_{ik}]$中的一切元素均不为负, 且各行各列之和皆为1, 则 $y_1y_2\cdots y_n\geqslant x_1x_2\cdots x_n$.

108. （希尔伯特不等式）设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. 则有下列不等式成立：

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m \cdot a_n}{m+n} \leqslant \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

（希尔伯特, D. Hilbert, 1862—1942.）

［证］ 下面的证法为哈代所作. 基本上是利用柯西不等式. 不难看到：

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m \cdot a_n}{m+n} &= \sum_{m,n} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{a_m}{\sqrt{m+n}} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{a_n}{\sqrt{m+n}} \\
&\leqslant \left\{\sum_{m,n} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a_m^2}{m+n}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{m,n} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a_n^2}{m+n}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{m,n} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a_n^2}{m+n} = \sum_n a_n^2 \left\{\sum_m \frac{1}{m+n} \left(\frac{m}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} \\
&\leqslant \sum_n a_n^2 \sum_m \int_{(m-1)/n}^{m/n} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \\
&= \sum_n a_n^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi \sum_n a_n^2.
\end{aligned}$$

109. （哈代不等式）设 $a_n \geqslant 0$, $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ $(n=1, 2, \cdots)$. 则对 $p>1$, 成立不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,$$

此处假定右端的级数为收敛.

［证］ 不妨设 $a_1 > 0$. 令 $\alpha_n = A_n / n$. 则利用几何平均值不能大于算术平均值的事实可知

$$\begin{aligned}
\alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \alpha_n^{p-1} \cdot a_n &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1} [n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}] \alpha_n^{p-1} \\
&= \alpha_n^p \left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1} \alpha_n^{p-1} \alpha_{n-1}
\end{aligned}$$

$$=\alpha_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right)+\frac{(n-1)p}{p-1}(\alpha_n^p)^{\frac{p-1}{p}}(\alpha_{n-1}^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\alpha_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right)+\frac{n-1}{p-1}[(p-1)\alpha_n^p+\alpha_{n-1}^p]$$

$$=\frac{1}{p-1}[(n-1)\alpha_{n-1}^p-n\alpha_n^p].$$

由此相加得

$$\sum_{n=1}^N\alpha_n^p-\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^N\alpha_n^{p-1}a_n\leqslant-\frac{N\alpha_N^p}{p-1}\leqslant0.$$

再应用赫尔特不等式，则得

$$\sum_{n=1}^N\alpha_n^p\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^N\alpha_n^{p-1}a_n$$

$$\leqslant\frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^N a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^N\alpha_n^p\right)^{1/p'},$$

这里 $p'=\frac{p}{p-1}$. 故自两端约去 $(\sum d_n^p)^{1/p'}$ 之后，配乘 p 次方幂即得

$$\sum_{n=1}^N\alpha_n^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^N a_n^p.$$

最后命 $N\to\infty$，就得到所要证的哈代不等式.

110. 设 $a_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^\infty a_n<\infty$. 则

$$\sum_{n=1}^\infty(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}\leqslant e\sum_{n=1}^\infty a_n.\quad\text{(Carleman)}$$

[证] 于下列哈代不等式中令 $p\to\infty$ 并应用命题 40 即得:

$$\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{a_1^{1/p}+a_2^{1/p}+\cdots+a_n^{1/p}}{n}\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^\infty a_n.$$

111. 设 $f(x)>0$. 求证

$$\ln\int_0^1 \exp f(x)\,dx \geqslant \int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \exp\int_0^1 \ln f(x)\,dx.$$

112. 试写出哈代不等式和卡尔曼(T. Carleman, 1892—1949)不等式的积分形式.

［解］ 令 $p>1, f(x)\geqslant 0$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. 则哈代不等式的积分形式为

$$\int_0^\infty \left\{\frac{F(x)}{x}\right\}^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx.$$

又若 $f(x)>0$, 则卡尔曼不等式的积分形式便是

$$\int_0^\infty \exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right\} dx \leqslant e\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

当然，我们得假定不等式右端的积分都收敛. 至于这两个不等式的证明在此从略.

113. 设 $f(x)$为一连续函数且 $0\leqslant f(x)<1(0\leqslant x\leqslant 1)$. 试证不等式:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}dx \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{1-\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

［提示］ 试与命题 67 作一比较.

114. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为一组不全相同之正数，则对于幂平均值 $M_s(a)=M_s$ 而言, 当 $s>t>0$ 时有不等式

$$\frac{t}{s}\cdot\frac{dM_t}{dt} \leqslant \frac{M_s-M_t}{s-t} \leqslant \frac{s}{t}\cdot\frac{dM_s}{ds}$$

成立. 又若 $f(x)\geqslant 0$ 是$[a, b]$上的一个可积函数, 则对于 $M_s(f)=M_s$ 而言, 亦有同样的不等式成立.

［证］ 只须给出本命题前半部分的证明即可，因为后半部分的证法完全相同. 令 $s>r>t>0$. 取 $\lambda=\frac{(r-t)s}{(s-t)r}$. 则

$$1-\lambda=\frac{(s-r)t}{(s-t)r},$$

$0<\lambda<1$. 由于 $\lambda A+(1-\lambda)B\geqslant A^{\lambda}B^{1-\lambda}(A,B>0)$. 故应用利雅普诺夫不等式(命题 55)可以得到

$$\lambda M_s+(1-\lambda)M_t\geqslant M_s^{\lambda}M_t^{1-\lambda}=(M_s^s)^{\lambda/s}(M_t^t)^{(1-\lambda)/t}$$

$$=\{(M_s^s)^{\frac{r-t}{s-t}}(M_t^t)^{\frac{s-r}{s-t}}\}^{\frac{1}{r}}>(M_r^r)^{\frac{1}{r}}=M_r.$$

因此代入得 $(r-t)sM_s+(s-r)tM_t>(s-t)rM_r$. 亦即

$$(*)\qquad t\cdot\frac{M_s-M_r}{s-t}<r\frac{M_s-M_r}{s-r}.$$

今命 $r\to s-0$, 则得

$$t\frac{M_s-M_t}{s-t}\leqslant\lim_{r\to s-0}r\frac{M_s-M_r}{s-r}=s\cdot\frac{dM_s}{ds}.$$

故可见不等式的右边已成立, 又显然 (*) 式亦可改写成下列形式:

$$r\frac{M_r-M_t}{r-t}<s\frac{M_s-M_t}{s-t}.$$

于是再命 $r\to t+0$, 则又得

$$t\cdot\frac{dM_t}{dt}\leqslant s\frac{M_s-M_t}{s-t}.$$

故不等式的左边亦成立.

115. 设 $M_t=M_t(a)(t>0)$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数. 试证

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2\ln M_t^t=\sum_{j<k}(a_ja_k)^t\,(\ln(a_j/a_k))^2\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^t\right)^2$$

并从而推证利雅普诺夫不等式.

116. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为相异之正数. 试证不可能找到一个大正数 N 使凡 $t>N$ 时恒有关系式

$$\left(\frac{M_t'(a)}{M_t(a)}\right)'>0$$

成立，这里出现的撇“′”表示对 t 求导数.

117. 设 a, b, c, u, v, w 以及 p 都是正数，并且

$$a^{1/p}+c^{1/p}\leqslant b^{1/p}, \qquad u^{1/(p+1)}+w^{1/(p+1)}\geqslant v^{1/(p+1)}.$$

则

$$ubc-vca+wab\geqslant 0,$$

式中的等号当且仅当题设的不等式都是等式并且 $a^{p+1}/u^p=b^{p+1}/v^p=c^{p+1}/w^p$ 时适用. (Schur)

［证］ 设 $p>0$，则由赫尔特不等式得

$$ac(u^{1/(p+1)}+w^{1/(p+1)})^{p+1}=[(uc)^{1/(p+1)}a^{1/(p+1)}$$
$$+(wa)^{1/(p+1)}c^{1/(p+1)}]^{p+1}\leqslant(uc+wa)(a^{1/p}+c^{1/p})^p.$$

所以

$$acv\leqslant(uc+wa)b.$$

118. 设 x, y, z 是正数，不全相等，而 λ 是实数. 则

$$x^\lambda(x-y)(x-z)+y^\lambda(y-z)(y-x)+z^\lambda(z-x)(z-y)>0.$$

(Schur)

［证］ 不妨设 $0<z\leqslant y\leqslant x$，于命题 117 置 $p=1$，$a=y-z$，$b=x-z$，$c=x-y$，$u=x^\lambda$，$v=y^\lambda$，$w=z^\lambda$ 即得.

119. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 皆为正数，$A_i=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j\neq i}x_j$，

$$G_i=\Big(\prod_{j\neq i}x_j\Big)^{\frac{1}{n-1}}\ (i=1, 2, \cdots, n).$$

则当 $n\geqslant 3$ 时

$$\frac{1}{n}(G_1+G_2+\cdots+G_n)\leqslant(A_1A_2\cdots A_n)^{1/n}. \qquad \text{(Carlson)}$$

［证］ 对 $i, j=1, 2, \cdots, n$，令 $A_{ii}=A_i$，$G_{ii}=G_i$，

$$A_{ij}=\frac{x_1+\cdots+x_n-x_i-x_j}{n-2},\quad G_{ij}=\left(\frac{x_1\cdots x_n}{x_ix_j}\right)^{1/(n-2)}\quad(i\neq j).$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ij}=nA_j$，$\prod\limits_{j=1}^{n}G_{ij}=G_i^n$. 应用赫尔特不等式得

$$\sum_{i=1}^{n} G_{i1}^{\frac{1}{n}} G_{i2}^{\frac{1}{n}} \cdots G_{in}^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} G_{i1}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} G_{i2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} G_{in}\right)^{\frac{1}{n}},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} G_i \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} G_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

再以 $\sum_{i=1}^{n} G_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{n} A_{ij} = nA_j$ 代入即得所要证的不等式.

120. 设函数 $\phi(x)$ 在区间 $(0,\ 2b)$ 上满足 $\phi'''(x)>0$. 又设 $0<x_i\leqslant b, p_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$. 则

$$\frac{\sum p_i \phi(x_i)}{\sum p_i} - \phi\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \leqslant \frac{\sum p_i \phi(2b-x_i)}{\sum p_i} - \phi\left(\frac{\sum p_i (2b-x_i)}{\sum p_i}\right),$$

式中的和是对 i 从 1 到 n 做的, 并且等号仅对所有 x_i 皆相等的情形适用. (Levinson)

[提示] $f(x)=\phi(x)-\phi(2b-x)$ 是一个严格的上凸函数.

121. 设 $0<x_i\leqslant\frac{1}{2} \quad (i=1,2,\cdots,n)$. 则

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} (1-x_i)\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} (1-x_i)\right)^n,$$

式中等号仅对所有 x_i 皆相等的情形适用. (樊畿)

[证] 于命题 120 置 $\phi(x)=\ln x, p_i=1,\ b=\frac{1}{2}$ 即得.

122. 设 $f(x)$ 在长度不超过 2 的区间上满足条件 $|f(x)|\leqslant 1$ 及 $|f''(x)|\leqslant 1$. 则 $|f'(x)|\leqslant 2$. 这里常数 2 是最好可能的.

(Landau)

[证] 不妨设 $f(x)$ 定义在 $[0,2]$ 上. 我们有

$$f(0)=f(x)+(-x)f'(x)+\frac{1}{2}(-x)^2 f''(t_1)$$

$$(0\leqslant t_1\leqslant x\leqslant 2),$$

$$f(2)=f(x)+(2-x)f'(x)+\frac{1}{2}(2-x)^2f''(t_2)$$

$$(0\leqslant x\leqslant t_2\leqslant 2),$$

从而

$$2f'(x)=f(2)-f(0)+\frac{1}{2}x^2f''(t_1)-\frac{1}{2}(2-x)^2f''(t_2),$$

$$2|f'(x)|\leqslant 4-x(2-x)\leqslant 4.$$

所以 $|f'(x)|\leqslant 2$. 这个估计可以被函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$ 达到.

123. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可微, 并且 $|f'(x)|\leqslant M$. 则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|$$

$$\leqslant\frac{M(b-a)}{4}\left[1-\left(\frac{1}{M}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2\right].$$

(Iyengar)

[提示] 利用下列不等式估计积分:

$$f(x)\leqslant L(x)=\begin{cases}f(a)+M(x-a) & (a\leqslant x\leqslant\alpha),\\ f(b)+M(b-x) & (\alpha\leqslant x\leqslant b);\end{cases}$$

$$f(x)\geqslant l(x)=\begin{cases}f(a)-M(x-a) & (a\leqslant x\leqslant\beta),\\ f(b)-M(b-x) & (\beta\leqslant x\leqslant b),\end{cases}$$

这里 α, β 的取值使 $L(x)$, $l(x)$ 为连续.

124. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二次可微, 并且 $|f''(x)|\leqslant M$. 则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{1+Q^2}{8}(b-a)(f'(b)-f'(a))\right|$$

$$\leqslant \frac{M(b-a)^2}{24}(1-3Q^2),$$

式中

$$Q^2=\frac{\left[f'(a)-2\frac{f(b)-f(a)}{2}+f'(b)\right]^2}{M^2(b-a)^2-(f'(b)-f'(a))^2}.$$

[提示] 利用与上题相类似的方法.

125. 设 $f(x)$和 $g(x)$是$[a, b]$上的两个可积函数，满足 $\alpha\leqslant f(x)\leqslant A$, $\beta\leqslant g(x)\leqslant B$, 这里 α, A, β, B 都是常数. 则

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4}(A-\alpha)(B-\beta).$$

(H. Grüss)

[证] 不妨设 $a=0, b=1$. 记

$$\int_0^1 f(x)dx=F,\quad \int_0^1 g(x)dx=G,$$

$$D(f, g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx-FG.$$

则 $$D(f, f)=(A-F)(F-\alpha)-\int_0^1 [A-f(x)][f(x)-\alpha]dx$$

$$\leqslant (A-F)(F-\alpha)\leqslant \frac{1}{4}(A-\alpha)^2.$$

$$D(f, g)=\int_0^1 [f(x)-F][g(x)-G]dx.$$

从而由柯西不等式

$$D(f, g)^2\leqslant D(f, f)D(g, g)\leqslant \frac{1}{16}(A-\alpha)^2(B-\beta)^2.$$

(G. Grüss)

126. 设函数 $f(x)$在$[0, 1]$上非负并且单调减少, 则

$$\frac{\int_0^1 xf(x)^2dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\leqslant\frac{\int_0^1 f(x)^2dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

[提示] $\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]dxdy\leqslant 0.$

127. 设$f(x)$是$[a, b]$上的连续函数，不恒等于零并且满足$0\leqslant f(x)\leqslant M$. 则

$$0<\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{12}M^2(b-a)^4. \qquad \text{(Dunkel)}$$

[证] 令上式居中的差式为 J. 则

$$J=\iint_D f(x)f(y)(1-\cos x\cos y-\sin x\sin y)dxdy$$

$$=\iint_D f(x)f(y)(1-\cos(x-y))dxdy,$$

这里 $D=[a, b]\times[a, b]$. 所以

$$0<J\leqslant M^2\iint_D(1-\cos(x-y))dxdy$$

$$=M^2(b-a)^2\left[1-\left(\frac{\sin\frac{b-a}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)^2\right].$$

这是对 J 最好可能的上界估计. 题文中的是较好的估计，利用不等式 $z-\frac{z^3}{6}<\sin z<z(z>0)$得到.

128. 设函数 $g(x)$在$[0, a]$上绝对连续，$g(0)=0$. 则

$$\int_0^a|g(x)g'(x)|dx\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a g'(x)^2dx.$$

式中的等号当且仅当 $g(x)=Cx$ 时适用，C 是常数.

［证］ 置 $h(x)=\int_0^x |g'(t)|\,dt$ $(0\leqslant x\leqslant a)$. 则 $|g(x)|\leqslant h(x)$. 所以

$$2\int_b^a |g'(x)g(x)|\,dx\leqslant 2\int_0^a h'(x)h(x)\,dx=h(a)^2.$$

另一方面，由布涅可夫斯基不等式，

$$h(a)^2=\left(\int_0^a h'(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_0^a dx\int_0^a h'(x)^2\,dx$$
$$=a\int_0^a |g'(x)|^2\,dx.$$

129. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,h]$ 上绝对连续，$f(0)=f(h)=0$. 则

$$\int_0^h |f(x)f'(x)|\,dx\leqslant\frac{h}{4}\int_0^h f'(x)^2\,dx.$$

式中常数 $h/4$ 是最好可能的. (Opial)

［提示］ 利用上题的结果即可证得.

130. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续. 则对任意 c, $a<c<b$, 以及 $p>1$, 有

$$\int_a^b |f''(x)|^p\,dx$$
$$\geqslant\left\{\frac{p-1}{2p-1}(b-a)\right\}^{1-p}\left|\frac{f(b)-f(c)}{b-c}-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|^p.$$

式中等号当且仅当 $f(x)$ 是如下形式的函数时适用:

$$f(x)=\begin{cases}A_0\left\{(p-1)(x-a)^2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^{1/(p-1)}-(2p-1)(c-a)\right.\\ \qquad\left.\cdot(x-a)+p(c-a)^2\right\}+A_1x+A_2 \quad (a\leqslant x\leqslant c),\\ A_0\left\{(1-p)(b-x)^2\left(\dfrac{b-x}{b-c}\right)^{1/(p-1)}+(2p-1)(b-c)\right.\\ \qquad\left.\cdot(b-x)-p(b-c)^2\right\}+A_1x+A_2 \quad (c\leqslant x\leqslant b),\end{cases}$$

这里 A_0, A_1, A_2 是常数.

［证］ 对 $a\leqslant x\leqslant b$, 由泰勒公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^b f''(t)\varphi_t(x)dt,$$

式中 $\varphi_t(x)=\max(0,x-t)$. 从而

$$\nabla(f)\stackrel{记}{=}\frac{f(b)-f(c)}{b-c}-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\int_a^b f''(t)\delta(t)dt,$$

$$\delta(t)\stackrel{记}{=}\nabla(\varphi_t)=\begin{cases}(t-a)/(c-a) & (a\leqslant t\leqslant c),\\ (b-t)/(b-c) & (c\leqslant t\leqslant b).\end{cases}$$

所以由赫尔特不等式

$$|\nabla(f)|\leqslant\left\{\int_a^b\delta(t)^{\frac{p}{p-1}}dt\right\}^{\frac{p-1}{p}}\left\{\int_a^b|f''(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left\{\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)(b-a)\right\}^{\frac{p-1}{p}}\left\{\int_a^b|f''(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

由是不难得到题中的不等式.

131. 设 $f'(x)$在$[a,b]$上绝对连续. 则

$$\int_a^b f''(x)^2dx\geqslant\frac{12}{(b-a)^3}\left\{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)\right\}^2,$$

式中常数 $12/(b-a)^3$ 是最好可能的. (Зморович)

[证] 于命题 130 置 $p=2,c=(a+b)/2$ 即得.

132. 设 $f^{(r)}(x)$在$[-1,1]$上绝对连续$(r\geqslant1)$. 又设整数 k 满足$r\geqslant k\geqslant\frac{r}{2}$. 置 $P_{k,r-k}(t)=\frac{1}{k!2^k}\frac{d^{2k-r}}{dt^{2k-r}}(t^2-1)^k$. 若正值可测函数 $\rho(x)$使积分值

$$\gamma=\int_{-1}^1\rho(t)^{1/(1-p)}|P_{k,r-k}(t)|^{p/(p-1)}dt$$

为有限, 则对 $p>1$, 成立着下列不等式:

$$\int_{-1}^1\rho(t)|f^{(r+1)}(t)|^p dt\geqslant$$

$$\gamma^{1-p}\left|\sum_{j=0}^k\frac{(2k-j)!}{j!(k-j)!2^{k-j}}\{f^{(j)}(-1)-(-1)^jf^{(j)}(1)\}\right|^p.$$

式中的常数 γ^{1-p} 是最好可能的.

［提示］ 利用命题 130 的证法来证. 注意在两个 $k+1$ 重节点的 $2k+1$ 阶差商的显式表示(参阅第四章命题 97).

133. 设 $f'(x)$在$[-1,1]$上绝对连续, $f(-1)=-1, f(1)=1$, $f'(-1)=f'(1)=0$. 则对 $p>1$, 有

$$\int_{-1}^{1}|f''(x)|^p dx \geqslant 2\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p-1}.$$

等号仅对 $f(x)=\frac{2p-1}{p}x-\frac{p-1}{p}|x|^{(2p-1)/(p-1)}\operatorname{sign} x$ 适用.

§5. 关于常用函数的若干不等式

134. (约当不等式) 设 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$. 则

$$1>\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{2}{\pi}.$$

［提示］ $\sin x/x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$单调下降.

135. 设$0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$. 则

$$\frac{\sin x}{x}>\sqrt[3]{\cos x}.$$

［证］ 置 $f(x)=x-\sin x(\cos x)^{-\frac{1}{3}}$. 易证 $f''(x)<0$. 从而 $f'(x)<f'(0)=0$. 又从而 $f(x)<f(0)=0\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

136. 试证当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$时有

$$(\sin x)^{-2}\leqslant x^{-2}+1-\frac{4}{\pi^2}.$$

［提示］ 置 $f(x)=(\sin x)^{-2}-x^{-2}$. 由上题可知 $f'(x)>0$.

137. 试证对所有实数 x 和 t，有

$$\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})\leqslant\frac{x^2+x\sin t+1}{x^2+x\cos t+1}\leqslant\frac{1}{3}(4+\sqrt{7}).$$

［证］ 不妨设 $\sin t\neq\cos t$. 上式居中的分式记之以 y. 则

$$(y-1)x^2+(y\cos t-\sin t)x+(y-1)=0.$$

y 的取值应使上述二次式的判别式为非负:

$$(y\cos t-\sin t)^2-4(y-1)^2\geqslant 0.$$

这个不等式的解为 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$，$y_1$ 和 y_2 是上式左端关于 y 的两个零点. 而所说的零点应是

$$(2-\sin t)/(2-\cos t)\text{和}(2-\sin(\pi+t))/(2-\cos(\pi+t)).$$

所以只要证明对所有 t 有下列不等式成立即可:

$$\frac{1}{3}\left(4-\sqrt{7}\right)\leqslant\frac{2-\sin t}{2-\cos t}\leqslant\frac{1}{3}\left(4+\sqrt{7}\right).$$

用研究函数 $(2-\sin t)/(2-\cos t)$ 的极值的办法可以证明此不等式.

138. 试证

$$\frac{2}{2x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\quad(x>0).$$

139. 设 $x>0, x\neq 1$. 则

$$\frac{\ln x}{x-1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}.\qquad\text{(Karamata)}$$

［证］ 置 $x=(1+t)^2/(1-t)^2$，所要证的不等式化为

$$\frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}-\frac{2}{1-t^2}\leqslant 0\quad(0<|t|<1).$$

展成幂级数，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)t^{2n}\geqslant 0\quad(|t|<1).$$

140. 设 $x>0, x\neq 1$. 则

$$\frac{\ln x}{x-1}\leqslant\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}. \qquad \text{(Karamata)}$$

［证］ 置 $x=(1+t)^3/(1-t)^3$. 所要证的不等式化为

$$\frac{3}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t}-\frac{t^2+3}{1-t^4}\leqslant 0 \quad (0<|t|<1).$$

展成幂级数，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{4n+2}+3\sum_{n=0}^{\infty} t^{4n}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}\geqslant 0 \quad (|t|<1),$$

即
$$3\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)t^{4n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{4n+3}\right)t^{4n+2}\geqslant 0.$$

141. 求最小的 β 和最大的 α, 使对所有的正整数 n 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$$

［解］ 命 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\varphi(n)}=e$. 则 $\inf\varphi(n)$ 便是最大的 α. 今

$$\varphi(n)=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n, \quad \varphi'(x)=\frac{1}{(x^2+x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2}-1.$$

由命题 138 可知当 $x>0$ 时 $\varphi'(x)>0$. 于是

$$\text{最大的 } \alpha=\min\varphi(n)=\varphi(1)=\frac{1}{\ln 2}-1.$$

类似地, 最小的 $\beta=\sup\varphi(n)=\lim\varphi(n)=\frac{1}{2}$.

142. 所有带偶下标的伯努利数满足下列不等式:

$$\frac{2}{\pi^{2k}2^{2k}}<(-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}<\frac{2}{\pi^{2k}(2^{2k}-2)}.$$

［提示］ 由第二章命题 95, 96 及 99 可得.

143. 设 $0<t<\frac{\pi}{6}$. 则

$$t+\frac{1}{3}t^3<\operatorname{tg}t<t+\frac{4}{9}t^3. \qquad \text{(Djoković)}$$

［提示］ 置 $f(t)=(\mathrm{tg}\,t-t)/t^3, f'(t)=g(t)/t^4$. 则 $g'(t)>0$ $\left(0<t<\frac{\pi}{6}\right)$.

144. 设 $0<x<1$. 则

$$\frac{4}{\pi}\frac{x}{1-x^2}<\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x<\frac{\pi}{2}\frac{x}{1-x^2}. \qquad \text{(Becker-Stark)}$$

［证］ 由第二章命题 84 得

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(2^{2k}-1)\pi^{2k-1}|B_{2k}|}{(2k)!}x^{2k-1}.$$

所以由命题 142 得 $\left(B_2=\frac{1}{6}\right)$:

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x<\frac{\pi}{2}x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4}{\pi}x^{2k-1}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k-1}=\frac{\pi}{2}\frac{x}{1-x^2}.$$

由是证得题中不等式的右边. 至于左边, 置

$$\varphi(x)=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{x}-x\right).$$

只要证明 $\varphi(x)<0\ (0<x<1)$. 由命题 136,

$$\varphi'(x)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)-\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)^{-2}$$

$$\geqslant\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right)(x^{-2}-1)>0.$$

145. (伯努利不等式)设 $x\geqslant-1, 0<\alpha<1$. 则

$$(1+x)^{\alpha}\leqslant1+\alpha x.$$

又若 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$, 则不等式反向.

146. 利用伯努利不等式证明当 $\alpha>0$ 时有

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}<1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}<\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

147. 试证, 当 $0>\alpha>-1$ 时有

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1}<m^{\alpha}+(m+1)^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}$$

$$<\frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

148. 设 x 和 y 是两个不相等的正数. 则

$$\sqrt{xy}<\frac{x-y}{\ln x-\ln y}<\left(\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{2}\right)^3. \qquad \text{(林同坡)}$$

［证］ 左边的不等式由卡拉马答(J. Karamata, 1902—1967)的不等式(命题 139)即得. 为证明右边的不等式, 对 $t\geqslant 1$, 命

$$f(t)=\frac{3}{8}\ln t-\frac{t^3-1}{(t+1)^3}. \text{ 则 } f'(t)=\frac{3}{8}\frac{(t-1)^4}{t(t+1)^4}>0.$$

所以设 $y<x$ 时, 有 $f\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)>f(1)=0$.

149. 设 x 和 y 是两个不相等的正数. 则

$$\left(\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{2}\right)^{3/2}<e^{-1}(x^x/y^y)^{1/(x-y)}. \qquad \text{(Stolarsky)}$$

［证］ 取对数, 命题归结为

$$\frac{3}{2}\ln\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{2}\leqslant -1+\ln x+y\frac{\ln x-\ln y}{x-y}.$$

不妨设 $y<x$. 置 $u=x/y$, 不等式归结为

$$f(u)=\frac{\ln u}{u-1}+\frac{3}{2}\ln\frac{2}{1+u^{-2/3}}-1>f(1+0)=0 \quad (u>1).$$

于是, 通过下列计算得证:

$$f'(u)=-\frac{\ln u}{(u-1)^2}+\frac{1}{u(u-1)}+\frac{1}{u(1+u^{2/3})},$$

$$f'(t^3)=\frac{1}{(t^3-1)^2}\left\{\frac{(t+1)(t^3-1)}{t(t^2+1)}-3\ln t\right\}$$

$$=\frac{g(t)}{(t^3-1)^2},$$

$$g'(t)=(t-1)^3(t^3-1)>0,$$

$$g(t)>g(1)=0 \quad (t>1).$$

150. 设 α 为不是整数的任意实数, m 和 n 为非负整数, $m+n$

>0. 写

$$p_m(x)=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m-\alpha}{m-\nu}\binom{n+\alpha}{\nu}x^{\nu},$$

$$q_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m-\alpha}{\nu}\binom{n+\alpha}{n-\nu}x^{\nu}.$$

试根据第四章命题 78 证明有下列关系式成立:

$$p_m(x)-x^{\alpha}q_n(x)$$
$$=\theta\binom{m-1-\alpha}{m}\binom{n+\alpha}{n}\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}(1-x^{\alpha-m})(1-x)^{m+n},$$

式中$0<\theta<1$.

［提示］ 由第四章命题 78 有

$$p_m(x)-x^{\alpha}q_n(x)=\binom{m-\alpha}{m}\binom{n+\alpha}{n}\alpha\int_x^1 g(t)t^{\alpha-m-1}dt,$$

$$g(t)=(t-x)^m(1-t)^n.$$

用研究极值的方法可知

$$0<g(t)\div\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}(1-x)^{m+n}\leqslant 1.$$

151. 试证在命题 150 的条件下, 又有

$$p_m(x)-x^{\alpha}q_n(x)$$
$$=\theta\binom{m-\alpha}{m}\binom{n-1+\alpha}{n}\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}(x^{-n}-x^{\alpha})(1-x)^{m+n},$$

式中 $0<\theta<1$.

152. 试证在命题 150 的条件下, 当 $m=n$ 时又有

$$p_n(x)-x^{\alpha}q_n(x)$$
$$=\theta\binom{n-\alpha}{n}\binom{n+\alpha}{n}(1-x^{\alpha})(1-\sqrt{x})^{2n},$$

式中 $0<\theta<1$.

［注意］ 以上三题可以看成命题 145 的拓广和精密化.

153. 设 m 和 n 是非负整数, $m+n>0$. 试根据第四章命题 75 的结果, 证明对 $x>0$, 存在 θ, $0<\theta<1$, 使

$$e^x q_n(x)-p_m(x)=\theta(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!(m+n+1)!}x^{m+n+1}e^x,$$

式中

$$p_m(x)=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{m+n}{\nu}}\cdot\frac{x^\nu}{\nu!},$$

$$q_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{\binom{n}{\nu}}{\binom{m+n}{\nu}}\cdot\frac{x^\nu}{\nu!}.$$

［提示］ 由第四章命题 75 得

$$e^x q_n(x)-p_m(x)=\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!}\int_0^x t^n(t-x)^m e^t\,dt$$

$$=\theta\frac{(-1)^n x^{m+n}e^x}{(m+n)!}\int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt$$

$$=\theta(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!(m+n+1)!}x^{m+n+1}e^x.$$

154. 设 $0\leqslant a\leqslant x_1\leqslant x_2$, 而 n 为正整数. 试证

$$x_2^{1/n}-x_1^{1/n}\leqslant(x_2-a)^{1/n}-(x_1-a)^{1/n}. \qquad \text{(Dresden)}$$

［证］ 写 $y=x^{1/n}$. 则

$$y(x_2)-y(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}y'(t)\,dt\leqslant\int_{x_1-a}^{x_2-a}y'(t)\,dt$$

$$=y(x_2-a)-y(x_1-a).$$

155. 设 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}(x>0)$, $f(0)=0$. 则当且仅当 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时比值 $|f(x_1)-f(x_0)|/|x_1-x_2|^\alpha$ 对 $0\leqslant x_0<x_1\leqslant1$ 为有界.

(Curtiss)

［证］ $f(x)$在$[(x_1^{-1}+2\pi)^{-1}, x_1]$上的值取遍$f(x)$在$[0, x_1]$上的值．所以记使$f(x)=f(x_0)$ $(0\leqslant x\leqslant x_1)$的最大的$x$为$x_2$时，$x_2^{-1}\leqslant x_1^{-1}+2\pi$．由是，若$\alpha\leqslant\frac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_0)| &= |f(x_1)-f(x_2)| \leqslant \int_{x_2}^{x_1}|f'(x)|dx \\ &\leqslant |x_1-x_2|^{1/2}\left[\int_{x_2}^{x_1}|f'(x)|dx\right]^{1/2} \\ &\leqslant |x_1-x_0|^{1/2}\left[\int_{x_2}^{x_1}(1+x^{-1})^2dx\right]^{1/2} \\ &\leqslant |x_1-x_0|^{\alpha}[x_1-x_2+2\ln(x_1/x_2)+x_2^{-1}-x_1^{-1}]^{1/2} \\ &\leqslant |x_1-x_0|^{\alpha}[1+2\ln(1+2\pi)+2\pi]^{1/2}.\end{aligned}$$

若$\alpha>\frac{1}{2}$，我们取$x_0=(\pi n)^{-1}$，$x_1=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$，则

$$\frac{|f(x_1)-f(x_0)|}{|x_1-x_0|^{\alpha}}=2^{\alpha}\pi^{\alpha-1}n^{2\alpha-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\alpha-1}$$

是无界的．

156. 设$t>0$．则

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}(1-e^{-\frac{t^2}{2}})}<\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx<\sqrt{\frac{\pi}{2}(1-e^{-\frac{2}{\pi}t^2})}.\ \text{(J. T. Chu)}$$

［证］ 记$J=\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$．则$4J^2=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy$，

这里$D=[-t, t]\times[-t\times t]$．把$D$换为$S_1=(x^2+y^2\leqslant t^2)$及$S_2=\left(x^2+y^2\leqslant\frac{4}{\pi}t^2\right)$，并用极坐标计算相应的积分，即得$4J^2$的上、下界值．

157. 设z_1和z_2是任意复数，而c为正数．则

$$|z_1+z_2|^2\leqslant(1+c)|z_1|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|z_2|^2,$$

式中等号当且仅当 $z_2=cz_1$ 时适用. (Bohr)

158. 设 z_k 皆为复数，而 a_k 是满足 $\sum\limits_1^n 1/a_k=1$ 的一组正数. 则

$$|z_1+\cdots+z_n|^2\leqslant a_1|z_1|^2+\cdots+a_n|z_n|^2. \qquad \text{(Archbold)}$$

［证］ 设法利用柯西不等式:

$$\frac{\Sigma a_k|z_k|^2}{|\Sigma z_k|^2}\geqslant\frac{\Sigma a_k|z_k|^2}{(\Sigma|z_k|)^2}=\left\{\Sigma\frac{1}{a_k}\right\}\cdot\left\{\Sigma a_k\left(\frac{|z_k|}{\Sigma|z_k|}\right)^2\right\}$$

$$\geqslant\left\{\Sigma\frac{|z_k|}{\Sigma|z_k|}\right\}^2=1.$$

159. 设 z 为复数, $|z|\leqslant1$. 则

$$\left|\frac{\sqrt{1-z}}{(1+\sqrt{1-z})^2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{6}}{9},$$

常数 $\sqrt{6}/9$ 是最好可能的.

［证］ 设 $0<t<1$, $|z|\leqslant t$. 若记 $r=\left|\frac{\sqrt{1-z}}{(1+\sqrt{1-z})^2}\right|$, $1-z=\rho e^{i\theta}$, 则 $1-t\leqslant\rho\leqslant1+t$, $|\theta|<\frac{\pi}{2}$, 并且

$$r=\frac{\sqrt{\rho}}{1+\rho+2\sqrt{\rho}\cos\frac{\theta}{2}}.$$

固定 ρ, 上式右端关于 $|\theta|$ 是单调的. $|\theta|$ 的最大值应当在圆周 $|z|=t$ 即 $|-\rho e^{i\theta}|=t$ 上达到. 由此解得此最大值 $|\theta|=\theta^*$ 应满足

$$2\sqrt{\rho}\cos\frac{\theta^*}{2}=\sqrt{(1+\rho)^2-t^2}.$$

因此

$$r\leqslant\frac{\sqrt{\rho}}{1+\rho+\sqrt{(1+\rho)^2-t^2}}\overset{\text{记}}{=}\varphi(\rho).$$

在 $1-t\leqslant\rho\leqslant 1+t$ 的范围内，$\varphi(\rho)$ 当 $\rho=\frac{1}{3}(1+\sqrt{4-3t^2})$ 时取最大值 $\frac{\sqrt{3+3\sqrt{4-3t^2}}}{3(2+\sqrt{4-3t^2})}$，所以我们得到

$$\left|\frac{\sqrt{1-z}}{(1+\sqrt{1-z})^2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{3+3\sqrt{4-3t^2}}}{3(2+\sqrt{4-3t^2})}\overset{\text{记}}{=}R(t)$$

$$(|z|\leqslant t).$$

$R(t)$ 当 $0<t<1$ 时单调，$R(t)<R(1-0)=\frac{\sqrt{6}}{9}$. 由是即得所要证的不等式.

160. 设 n 是任意正整数而 z 是复数. 则

$$\left|e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|\leqslant\left|e^{|z|}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n\right|<e^{|z|}\frac{|z|^2}{2n}.$$

(Kloosterman)

[证] $n=1$ 不等式天然成立. 设 $n\geqslant 2$. 则

$$\left|e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{z^k}{k!}\right|.$$

由于和式的系数全正，所以题中不等式左边已成立. 至于右边，可利用下列估计得到：

$$\frac{1}{k!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]<\frac{1}{k!}\left[1-\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2n\cdot(k-2)!}\quad(k\leqslant n),$$

$$\frac{1}{k!}\leqslant\frac{1}{2n\cdot(k-2)!}\quad(k>n).$$

关于第三章的注释

注 1. 在 §1，我们不借助于特殊的工具和理论框架而纯粹用

初等方法建立了一些命题. 其目的，除了提供简单的平均值定理和柯西不等式(命题 15, 26)为下面的专门讨论打下基础外，主要是演习纯粹初等方法的运用技巧. 这里,主要的技巧是恒等变形、完全归纳法以及利用二次型.

注 2. 以柯西不等式(命题 26)的第一种证法和切比晓夫不等式(命题28)的证法为代表,以大量的例题相辅助,我们首先较详细地展开了通过恒等变换建立不等式的技巧. 这种技巧的基本点是通过恒等变换形成一些可以一眼看出与有关量有大小关系的成份. 例如,形成一个完全平方项，从而该项必为非负(这就是所谓"配方法"),又如形成具有两个同号因子的项,从而该项亦为非负. 或者,凑成可以利用现成简单不等式$\left(\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b},\right.$ 等等$\left.\right)$的形式. 可以说,这是一种极有生命力和创造力的技巧.

注 3. 完全归纳的方法是首先通过特殊情形的分析洞察其内在的一般规律,然后用数学归纳法加以演绎地论证. 请仔细研究、比较命题 20 和 21. 粗看起来，似乎两个命题对一般规律的揣度都有类比的基础,但最终后者被否定. 另外，命题 11, 12, 13 以及下面的命题 85 的归纳证法也是值得学习的.

注 4. 命题 34 可以说是柯西不等式的逆式. 类似地赫尔特不等式也有这种逆式. 这类课题在近年仍在吸引人们的兴趣，有关文献可查阅 SIAM Review, 第 21 卷第 4 期, 第 550 至 557 页"关于柯西及赫尔特不等式的逆式的发展".

注 5. 命题 14, 15, 16 等都是基本命题 13 的特殊例子. 很明显的，命题 13 具有这样的几何解释:"在 n 维欧几里得空间中任意一个具有单位体积的 n 维正交多面体，其 n 条交于同一顶点的边长之和必不小于 n". 因此,不难看出,这个命题实际上是同这样一个命题等价的:"如果一个 n 维的正交多面体交于同一顶点的n

条边长的和是 n，则该多面体的体积最大等于 1”．事实上，就后一命题而言，只有当各边 x_i 都等于 1 时才能给出最大的体积 $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$．换句话说，在一般的情形下，如果 $x_i > 0$，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$，则必有 $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leqslant 1$．

注 6． § 1 中简单的平均值概念在以后两节得到了充分的拓广．§ 2的平均值概念在初等统计学中是基本而重要的，因为对于一组数量而言，平均值可以看作是该组数量按照某种标准所决定的一种有代表性的数值（这个数值本身可以不在该组数量之内）．在我们所讨论的各种平均值中，注意得最多的是幂平均值．这种平均值具有较广泛的意义，它不仅以算术平均值和调和平均值作为其特例，而且也以几何平均值作为它的极限情形（命题 40）而包括在内．

注 7． 命题 40 具有较深刻的意义．如上所说，幂平均值 $M_r(a)$ 是算术平均值的推广，它主要是把一组带有乘幂的数量用加法的方式来平均；而几何平均值则是通过乘法的方式来平均．因此，$M_r(a)$ 与 $G(a)$ 之间具有本质差别是一目了然的．但命题 40 告诉我们，在极限过程（$r \to 0$）下，$M_r(a)$ 却变成了 $G(a)$．因此，这个例子又正好说明这样的事实：“极限过程能够使变量结构形式产生质变．”当然类似的例子在数学分析中是到处可以找到的，而命题 40 只是许多典型例子中的一个而已．

注 8． 命题 43 中的不等式 $G(a, p) \leqslant A(a, p)$ 是一系列重要不等式的出发点，因此把它称为*基本不等式*．作为基本不等式的重要推论之一，便是著名的赫尔特不等式（命题 44），而赫尔特不等式又包含着闵科夫斯基不等式（命题 58）及利雅普诺夫不等式（命题 55）等为其重要推论．特殊形式的赫尔特不等式（命题 47, 48, 72）在解析式的估计中用处很大，其主要原因，便在于关于共轭指数 k，k' 的选择有着较多的灵活性的缘故．至于闵科夫斯基不等式的基

本重要性，更在于它是建立 L^p 空间理论的基本工具. 因为有了这个不等式，才能在 L^p 空间中引进“距离”的概念(满足三角形不等式的要求)，因而也就使 L^p 空间成为“距离空间”之一种(详细情形请参见泛函分析的各种教科书.)

注 9. 在 §3 中，我们见到许多积分不等式是从有穷不等式通过极限手续得来的. 但其中有一个重要的原则，那就是对有穷不等式而言，符号 Σ 在不等式两端出现的幂次必须是齐次的(见例题 79 的提示). 这个原则实际上可以作为从有穷不等式能否过渡到积分不等式的一个判别标准. 因此它对于我们去发现积分不等式是很有用处的. 举例来说，闵科夫斯基不等式(命题 58)的两端都是 Σ 的 $\frac{1}{r}$ 次齐次式，因此相应的积分不等式(命题 75, 76)之存在是理所当然的.

注 10. 凸性函数的方法是研究不等式的重要方法之一. §3 的后面 14 个命题及例题(85—98 题)以及 §4 中的 107, 120, 121 三题就是这个方法的初步介绍. 其中特别值得注意的是命题 85 (凸函数的基本不等式)，因为它是这个方法的最初的起点.

注 11. §4 中方法的多样性是值得注意的. 概略地讲，其中出现的方法包括: “图形面积的比较”(例题 99—102)，“条件极值的决定”(命题 104，请注意这个方法容易上手且大有潜力，例如赫尔特不等式等都可以用此法来证)，“变量替换的方法”(例题126—129)以及“泰勒展开的利用”(例题 122, 123, 130—133)等等. 当然要想在这些方法中抽出一些普遍的原则来，那是较为困难的. 因为这些方法的本身带有很大的特殊性，也可以说，它们只是因题制宜的方法. 此外，在这一节有许多命题和例题是利用现成的不等式工具来证明的(如 107—110, 114, 117—119, 125 诸题).

注 12. §5 中关于常用函数的 26 个不等式命题和例题，可能

是很有用处的. 但就研究方法而言,却比较简单. 其中,研究适当的辅助函数的增减是最主要的方法, 其次则是比较幂级数展开的系数. 不过,例题 150 至 158 诸题的解题技巧也相当丰富,值得留意. 此外,宜指出本节的许多不等式都具有某种"最佳性",即在一定的框架限制下不容再改进, 只是在陈述它们时为了节省篇幅和避免分散注意力而没有予以点明. 例如,例题 135 中,为使$\frac{\sin x}{x}>(\cos x)^a$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$整个区间上成立, 常数$a=\frac{1}{3}$是不容再改小的; 又如在例题 144 中,为使 $A\frac{x}{1-x^2}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x<B\frac{x}{1-x^2}$在 (0,1) 上成立,常数 $A=\frac{4}{\pi}$不容再改大而 $B=\frac{\pi}{2}$不容再改小,等等.

注 13. 对于$[a,b]$上定义的函数 $f(x)$ 和正数 α ($\alpha\leqslant1$), 倘若存在正的常数K使不等式$|f(x_1)-f(x_0)|\leqslant K|x_1-x_0|^\alpha$对 $a\leqslant x_0<x_1\leqslant b$ 都成立, 则说 $f(x)$在$[a, b]$上为α 阶赫尔特连续(或说满足α 阶利普希茨(R. Lipschitz, 1832—1903 条件)). 例题 155 是说, 函数 $x\sin\frac{1}{x}$经对其可去不连续点补充定义连续后, 还是一个$\frac{1}{2}$阶赫尔特连续的函数. 赫尔特连续性提供了对某些一致连续函数的较为细致的分类原则.

注 14. 例题 6, 8, 141中表现的求一个数列准确界值的方法值得读者去仔细体会.

第四章 阶的计算法及有关问题

本章的主要目的在于，通过命题和例题的方式论述阶的估计方法及应用. 开始时简要地叙述 o, O, $\bar{O}$ 等记号的运用法则. 其次讲应用阶的计算方法以判别某些极限过程(例如无穷级数及广义积分等)的收敛性与发散性. 作为阶的估计法的更细致的运用, 接着我们讨论了某些渐近式及切比晓夫质数分布定理的证法. 然后在第三节我们又讨论了几个与无穷大阶强度排列有关的问题——也就是杜布窪-雷茫(P. Du Bois-Reymond, 1831—1889)和彭加莱 (H. Poincaré, 1854—1912) 等人的一些命题. 这些命题有助于开拓我们对数量关系的视野. 在最后的两节中，我们对已经初步接触过的三个基本的渐近展开式——泰勒公式、欧拉-马克劳林求和公式和牛顿插值公式作了较为深入地讨论. 我们着重讨论了这些渐近展开公式的拓广和封闭形式余项的处理手法；在研究由这三个基本渐近展开式派生出的许多有用的其它渐近展开式时，我们也把重点放在如何处理余项以给出合乎应用要求的阶的估计上. 同第三节粗放决断的风格正相反，这两节是比较细致踏实的技巧.

首先应该指出：阶的概念与极限过程的概念是不能分离的. 简单地说, 极限过程即是变量的变化过程(由量变飞跃到质变阶段的过程), 而阶的概念则反映着过程中变量变化的快慢状态. 所谓快慢状态当然是按照相对的意义(亦即比较的意义)来说的. 这样说来, 阶的概念在数学分析中的重要性也就可想而知了.

设 $f(x)$, $g(x)$ 为任意函数, 其中 $g(x)$ 恒取正值. 若当 $x\to a$(这里 a 可以是 $0, \infty$ 或其它确定数值)

$f(x)/g(x) \longrightarrow 0$,　　则记作　$f(x)=o(g(x))$;

$f(x)/g(x) \longrightarrow 1$,　　则记作　$f(x) \sim g(x)$;

$f(x)/g(x) \longrightarrow A \neq 0$,　则记作　$f(x)=\bar{O}(g(x))$;

$|f(x)|/g(x) < A$,　　则记作　$f(x)=O(g(x))$;

$f(x)/g(x) \longrightarrow \infty$,　　则记作　$f(x) \leftfishtail g(x)$ 或 $g(x) \rightfishtail f(x)$.

以上出现的 A 系代表一绝对常数(有限实数). 注意当我们采用 o, O, $\bar{O}$, $\sim$ 等记号时, 必须指明自变数 x 系向何值趋近. 在显明的场合, 当然也可以默认 $x \to a$ 而不写明. 为简便计, 亦可将 $f(x)$, $g(x)$ 等缩写成 f, g 等. 显然由以上的定义易看出:

$$f=o(|g|),\quad g=o(|h|) \Longrightarrow f=o(|h|).$$

$$f=\bar{O}(|g|), g=\bar{O}(|h|) \Longrightarrow f=\bar{O}(|h|).$$

$$f \sim g, g \sim h \Longrightarrow f \sim h.$$

$$f=O(|g|),\quad g=O(|h|) \Longrightarrow f=O(|h|).$$

$$f=O(|g|),\quad g=o(|h|) \Longrightarrow f=o(|h|).$$

$$f=O(|g|),\quad a>0 \Longrightarrow |f|^a=O(|g|^a).$$

在以上的定义中如取 $g(x) \equiv 1$, 则 $O(g)=O(1)$, $o(g)=o(1)$, $\bar{O}(g)=\bar{O}(1)$等符号的意义即如下:

当 $f(x)=O(1)$, 即表示 $|f(x)| \leqslant A$(有界).

当 $f(x)=o(1)$, 即表示 $f(x) \longrightarrow 0$.

当 $f(x)=\bar{O}(1)$, 即表示 $f(x) \longrightarrow A \neq 0$.

$O(1)$, $o(1)$, $\bar{O}(1)$等符号亦可单独使用. $O(1)$即代表一有界变量; $o(1)$即代表一趋于零的变量(亦称无穷小变量); $\bar{O}(1)$则代表一趋近于某一定值(异于零)的变量. 显然由此定义还立即可得出:

$$o(1) \cdot O(g)=o(g),\quad o(g) \cdot O(1)=o(g),$$

$$O(f) \cdot O(g)=O(fg),$$

$$\bar{O}(f)\bar{O}(g)=\bar{O}(fg),\quad O(1) \cdot \bar{O}(g)=O(g),$$

$$o(1)\bar{O}(g)=o(g).$$

$$\sum_{k=1}^{n} O(1)=O(n), \qquad \sum_{k=1}^{n} o(1)=o(n) \quad (n\to\infty).$$

§1. 阶的估计法应用于收敛性问题

1. 设 $f(n)$ 为一实函数，且于 $n\to\infty$ 时，有

$$f(n)=1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\lambda}}\right), \lambda>0.$$

则对于任一实数 r 必有

$$(f(n))^r=1+\frac{r\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\mu}}\right),\ \mu>0.$$

［证］ 由于

$$\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\lambda}}\right)\right)=\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\nu}}\right), \nu>0.$$

$$\exp\left(\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\nu}}\right)\right)=1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\mu}}\right), \mu>0.$$

故得

$$(f(n))^r=\exp(r\cdot\ln f(n))=\exp\left\{r\left(\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\nu}}\right)\right)\right\}$$

$$=\exp\left(\frac{r\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\nu}}\right)\right)=1+\frac{r\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\mu}}\right).$$

2. 设 $0<\theta<1$. 则 $\theta^x=o(1)\quad(x\to\infty)$.

［证］ 置 $\theta=\frac{1}{1+d}, d>0$. 则

$$0<\theta^x=\left(\frac{1}{1+d}\right)^x<\frac{1}{1+xd}\to 0\ \ (x\to\infty).$$

3. 设 δ 为任意固定的小正数，则

$$x=o((1+\delta)^x),\ \ \ln x=o(x^\delta)\quad(x\to\infty).$$

［证］ (i) 不妨设 $0<\delta<1$. 于是

$$0<x/(1+\delta)^x<x/\left(1+x\delta+\frac{1}{2}x(x-1)\delta^2\right)\to 0\ \ (x\to\infty).$$

(ii) 置 $\ln x=t$，$e^{\delta}=1+d$，$(d>0)$．则当 $x>1$ 时由(i)即得

$$0<\ln x/x^{\delta}=t/e^{\delta t}=t/(1+d)^{t}\to 0\quad (t\to\infty \text{ 或 } x\to\infty).$$

4. 试证于 $x\to 0$ 时

$$\sin x\sim x,\quad \operatorname{tg}x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ e^{x}-1\sim x.$$

又于 $x\to 0+$ 时 $x^{x}\sim 1$.

5. 试证于 $x\to 0+$ 时 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$.

［证］ 由于$x=o(\sqrt{x})$ $(x\to 0+)$，故

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\sqrt{o(\sqrt{x})+\sqrt{o(\sqrt{x})+\sqrt{x}}}$$

$$\sim\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{8}}\quad (x\to 0+).$$

6. 试求下列极限值:

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x^{5}}\int_{0}^{x}e^{-t^{2}}\ dt-\frac{1}{x^{4}}+\frac{1}{3x^{2}}\right).$$

［解］ 显然所求极限即

$$\lim_{x\to 0+}\left\{x^{-5}\int_{0}^{x}\left(1-t^{2}+\frac{1}{2}t^{4}+O(t^{6})\right)dt-x^{-4}+\frac{1}{3}x^{-2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0+}x^{-5}\int_{0}^{x}\left(\frac{1}{2}t^{4}+O(t^{6})\right)dt$$

$$=\frac{1}{10}+\lim_{x\to 0+}x^{-5}\int_{0}^{x}O(t^{6})\,dt$$

$$=\frac{1}{10}+\lim_{x\to 0+}x^{-5}\cdot O(x^{7})=\frac{1}{10}.$$

7. 试证$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}$.

8. 设 $f(x)$为定义在$[0,\infty)$内的一个连续函数．试证

i) 于 $f(x)=O\left(\frac{1}{x^{s}}\right)$ $(s>1)$时 $\int_{0}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$,

ii) 于 $f(x)=\bar{O}\left(\frac{1}{x^{s}}\right)$ $(s\leqslant 1)$时 $\int_{0}^{\infty}|f(x)|\,dx=\infty$.

并证绝对收敛性隐含收敛性.

[提示] 这便是通常关于无穷积分的极限审敛法.

9. 试根据命题 8 判定下列各积分的敛散性.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}},\quad \int_{0+}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^{3/2}}dx,\quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x^2}}{\ln(x^2+1)}dx,\quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx,$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}dx.$$

10. 试应用阶的估计法证明下列积分

$$\int_1^\infty \frac{(e^{1/x}-1)^\alpha}{[\ln(1+x^{-1})]^{2\beta}}dx$$

于 $\alpha-2\beta>1$ 时为绝对收敛;而于 $\alpha-2\beta\leqslant 1$ 时为发散.

[证] 由例题 4 可知于 $x\to\infty$ 时,

$$\left(\frac{e^{1/x}-1}{1/x}\right)^\alpha \sim 1,\qquad \left(\frac{\ln(1+x^{-1})}{1/x}\right)^{-2\beta}\sim 1.$$

故可知被积函数

$$f(x)=\left(\frac{e^{1/x}-1}{1/x}\right)^\alpha\left(\frac{\ln(1+x^{-1})}{1/x}\right)^{-2\beta}x^{2\beta-\alpha}\sim x^{2\beta-\alpha}\quad (x\to\infty).$$

因此根据命题 8 即得本题之证明.

11. 试证下列积分为收敛:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}<\infty.$$

[证] 令$\{\delta_k\}$为单调下降于 0 的正数叙列. 今置

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}=\sum_{k=1}^\infty v_k+\int_0^{\pi-\delta_1}\quad+\sum_{k=1}^\infty v'_k,$$

此处

$$v_k=\int_{k\pi-\delta_k}^{k\pi+\delta_k}\frac{dx}{1+x^4\sin^2 x},\qquad v'_k=\int_{k\pi+\delta_k}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}}\frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}.$$

显然 $v_k < 2\delta_k$. 故若取 $\delta_k = k^{-\frac{4}{3}}$,则可见 $\Sigma v_k < \infty$,而同时

$$0 < v_k' < \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+(k\pi)^4 \sin^2 \delta_{k+1}}$$

$$= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \bar{O}\left(k^{\frac{4}{3}\cdot 2-4}\right) dx = \bar{O}\left(k^{-\frac{4}{3}}\right).$$

因此 $\Sigma v_k' < \infty$. 故知题中之无穷积分为收敛.

12. 试证下列积分为收敛:

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(\sin^2 x)^{1/3}} < \infty.$$

[证] 注意被积函数于 $x = n\pi$ 处分母为零, 并注意广义积分

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} |x|^{-\frac{2}{3}} dx \text{收敛, 且} \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

今置

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)|\sin x|^{\frac{2}{3}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi+}^{(n+1)\pi-} \frac{dx}{(1+x^2)|\sin x|^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

则易见

$$0 \leqslant u_n < \frac{2}{1+n^2\pi^2} \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{|\sin x|^{2/3}} = \bar{O}(n^{-2}).$$

因此 Σu_n 为收敛,从而原题得证.

13. 试证积分 $\int_{0+}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ 为发散.

[证] 显而易见

$$\int_{0+}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

$$\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{O}\left(\frac{1}{n}\right)\bar{O}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{O}\left(\frac{1}{n}\right)=\infty.$$

14. 试证积分$\int_0^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^s}$当且仅当 $s<1$ 时为收敛.

15. 试证积分$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x^s dx}{(\sin x)^t}$当且仅当 $t<s+1$ 时为收敛.

16. 试证$\int_1^{\infty}x^p(\ln x)^q dx$ 当且仅当 $p<-1<q$ 时为收敛.

17. 试通过变数代换法及阶的估计法以判别下列广义积分的敛散性:

$$\int_{0+}^{2}\ln x dx,\quad \int_{-2}^{2}\ln|\ln|x||dx,\int_{0+}^{\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha}dx\quad(\alpha>0),$$

$$\int_{0+}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx,\quad \int_{1+}^{2}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx,\quad \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx\quad(\alpha,\beta>-1).$$

18. 设 $f(x)$为定义在$[0,\infty)$内的一个连续函数,而

$$f(x)=O(x^{-1}(\ln x)^{-\alpha})\quad(x\to\infty),$$

其中 $\alpha>1$, 则$\int_{\alpha}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. 又当

$$f(x)=\overrightarrow{O}(x^{-1}(\ln x)^{-\alpha})\quad(x\to\infty)$$

而 $\alpha\leqslant 1$ 时, 则$\int_{\alpha}^{\infty}|f(x)|dx=\infty$.

19. 试判断下列积分的敛散性:

$$\int_2^{\infty}\frac{|\sin x|}{x\sqrt{\ln x}}dx,\quad \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}\ln x},\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx.$$

并证下列欧拉积分

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx$$

于 $a>0$ 时收敛, 而于 $a\leqslant 0$ 时发散.

20. 试叙述命题 8 与命题 18 在无穷级数方面所对应的命题.

21. 试证级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}$为发散.

［证］ 显见当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{\ln n}\cdot\frac{1}{n},$$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=\infty$. 故由比较审敛法便立即得证.

22. 试判定级数 $\sum\limits_{2}^{\infty}(\ln n)^{-\ln\ln n}$ 的敛散性.

［解］ 由于 $n=e^{\ln n}$, $\ln n=e^{\ln\ln n}$, 故

$$\begin{aligned}u_n&=(\ln n)^{-\ln\ln n}=e^{-(\ln\ln n)^2}\\&=(e^{\ln n})^{-(\ln\ln n)^2(\ln n)^{-1}}=n^{-(\ln\ln n)^2(\ln n)^{-1}}=n^{-o(1)},\end{aligned}$$

其中 $o(1)$ 为与 $\frac{1}{n}$ 同时趋于 0 的正数. 从而

$$u_n=n^{-o(1)}\succ\overline{O}(n^{-1})\quad(n\to\infty).$$

所以原级数 Σu_n 发散.

［注意］ 以上将 u_n 表作 $n^{-o(1)}$ 的过程可称之为“换底法”. 其目的就在于便于同 n 的阶作比较.

23. 试判定下列级数的敛散性:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n},\quad\sum_{1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(1+n)},\quad\sum_{1}^{\infty}\frac{n!}{n^n},$$

$$\sum_{2}^{\infty}(\ln n)^{-n},\quad\sum_{10}^{\infty}(\ln\ln n)^{-\ln n},\quad\sum_{1}^{\infty}r^{\ln n}$$

$$\left(r\geqslant\frac{1}{e}\right).$$

24. 若 $f(x)$ 为连续函数而 $f(x)\downarrow 0\quad(x\to\infty)$. 求证

$$\sum_{1}^{n}f(k)-\int_{1}^{n}f(x)dx=\overline{O}(1)\quad(n\to\infty).$$

［证］ 由单调下降性可知

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx > f(k) > \int_{k}^{k+1} f(x)dx \quad (k=2, 3, \cdots),$$

$$A_k = \int_{k-1}^{k} f(x)dx - \int_{k}^{k+1} f(x)dx > f(k) - \int_{k}^{k+1} f(x)dx$$

$$= B_k > 0.$$

从而 $\quad 0 < \sum_{2}^{n} B_k < \sum_{2}^{n} A_k < \int_{1}^{2} f(x)dx = M.$

因此 ΣB_k 为一部分和有上界的正项级数，故必收敛．亦即极限

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)dx \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{1}^{n-1} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)dx \right\}$$

存在．

25. 试证下列极限(欧拉常数)必存在

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right\} = \gamma.$$

26. 若 $0 < s < 1$．试证于 $n\to\infty$ 时有

$$\left(\frac{1}{1}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}\right)^s - \frac{n^{1-s}}{1-s} = \overline{O}(1).$$

27. 试证于 $n\to\infty$ 时，

(i) $\quad \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = \overline{O}(1),$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} [\Delta^s \sqrt{k+x}]_{x=0} = \overline{O}(1),$

此处 s 为 >2 之整数，Δ^s 表示对于 x 函数以 1 为步长的 s 阶差分．

28. 设 $u_k > 0, u_k \neq 1$．求证

$$\sum_{1}^{\infty} u_k < \infty \Longrightarrow \sum_{1}^{\infty} u_k^2 < \infty, \quad , \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{u_k}{1-u_k} < \infty.$$

［证］ 由于 $u_n \longrightarrow 0$．故有常数 $n_0 > 0$ 使凡 $n > n_0$ 时恒有

$$0 \leqslant u_n/(1-u_n) \leqslant 2u_n, \quad u_n^2 \leqslant u_n.$$

故由比较审敛法立即得证.

29. 设 $A_n=\sum_1^n\frac{1}{k}-\ln n-\gamma$. 试证于 n 充分大之后 A_n 的数值即恒为正,而且有一正常数 d 使得 $A_n>\frac{d}{n}$.

［证］ 可先取差分而再求和. 显然有

$$-\Delta_n=A_n-A_{n+1}=\ln(n+1)-\ln n-\frac{1}{n+1}$$

$$=\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n+1}\right)dx>\int_n^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n+1}\right)dx$$

$$>\int_n^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}>\frac{1}{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

置 n 为 $n, n+1, \cdots$ 而相加,则得

$$A_n-A_N>\frac{1}{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\quad (N>n).$$

命 $N\to\infty$, 则由命题 25, $A_N\to 0$. 故得 $A_n\geqslant\frac{1}{5}\frac{1}{n}$.

30. 设 u_n 为下列方程所定义:

$$U(n-1)=\ln\{(n/e)^n\sqrt{n}\}-\ln n!=\sum_2^{n-1}u_k.$$

试证于 n 充分大之后, u_n 即具有确定的正负号, 且 $u_n=O(n^{-2})$. 并由此可推证 $U_n=C+O(n^{-1})$, 此处 C 为确定之常数.

［证］ 对函数 U 进行一阶差分, 则可见于 $n>0$ 时,

$$u_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1=\frac{1}{2x_n}\ln\frac{1+x_n}{1-x_n}-1,$$

其中 $x_n=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}\leqslant\frac{1}{3}$. 又于 $x\leqslant\frac{1}{3}$ 时显然有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+0\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdot 2\left\{\frac{1}{(1+\theta x)^3}+\frac{1}{(1-\theta x)^3}\right\}$$

$$(0<\theta<1).$$

因此，

$$u_n=\frac{1}{6}x_n^2\left\{\frac{1}{(1+\theta_n x_n)^3}+\frac{1}{(1-\theta_n x_n)^3}\right\}\quad(0<\theta_n<1).$$

从而可知 $0<u_n<x_n^2<n^{-2}$. 故命题的第一部分已告证明.

又因 $\sum_2^\infty u_k<\infty$，故有 $\sum_2^\infty u_k=C$, 从而

$$U(n)=\sum_2^n u_k=C-\sum_{n+1}^\infty=C+O(n^{-1}).$$

［注意］ 由本命题可知下列极限

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}(-U(n))$$

存在. 亦即 $n!/(n/e)^n\sqrt{n}\to L(n\to\infty)$. 事实上，如应用华利斯(J. Wallis, 1616—1703)乘积公式

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

尚可进一步决定出 $L=\sqrt{2\pi}$. 因而可导出司特林(J. Stirling,1692—1770)公式

$$n!\sim(n/e)^n\sqrt{2\pi n}.$$

31. 设 Σa_k 为一正项发散级数, $S_n=\sum_1^n a_k$. 又设 $f(x)$ 为一正值单调下降函数. 试证

(i) $\int_1^\infty f(x)dx<\infty\Longrightarrow\sum_1^\infty f(s_k)a_k<\infty$.

(ii) $\int_1^\infty f(x)dx=\infty\Longrightarrow\sum_1^\infty f(s_{k-1})a_k=\infty$.

(iii) $a_n=O(1)\Longrightarrow\sum_1^\infty f(s_k)a_k$ 与 $\sum_1^\infty f(s_{k-1})a_k$ 同时收敛

或同时发散.

［证］ (i) 显然由假设可知

$$a_n f(s_n)=\int_{s_{n-1}}^{s_n} f(s_n)\ dx\leqslant\int_{s_{n-1}}^{s_n} f(x)dx,$$

$$\sum_2^n a_k f(s_k)\leqslant\int_{s_1}^{s_n} f(x)dx<M.$$

同理可证(ii). 至于(iii), 由假设$a_n<K$, 故易见

$$0\leqslant\sum_2^n a_k f(s_{k-1})-\sum_2^n a_k f(s_k)\leqslant K\sum_2^n\{f(s_{k-1})-f(s_k)\}$$

$$=K\{f(s_1)-f(s_n)\}\leqslant Kf(s_1)<M.$$

亦即两级数部分和之差不超过一有限常数. 故必同时收敛或同时发散.

32. 设 $f(x)$ 为正值单调下降函数 ($x\geqslant 0$), 又 $a>1$. 求证 $\Sigma f(k)$与 $\Sigma a^k f(a^k)$ 两者必同时收敛或同时发散.

［提示］ $f(a^n)\geqslant f(x)\geqslant f(a^{n+1})\qquad (a^n\leqslant x\leqslant a^{n+1}),$

$$(a^{n+1}-a^n)f(a^n)\geqslant\int_{a^n}^{a^{n+1}} f(x)dx\geqslant(a^{n+1}-a^n)f(a^{n+1}).$$

$$(a-1)\sum_1^n a^n f(a^n)\geqslant\int_a^{a^{n+1}} f(x)dx\geqslant(1-a^{-1})\sum_1^n a^{n+1}f(a^{n+1}).$$

33. 若 $\phi(n)\uparrow\infty, \phi(n+1)/\phi(n)\to l>1$. 则于$f(x)>0, f(x)\downarrow$ ($x\geqslant 0$)时, 级数$\Sigma f(n)$与$\Sigma\phi(n)f(\phi(n))$必同时收敛或同时发散.

34. 若 $a>\dfrac{1}{2}, \Sigma a_n<\infty$ ($a_n>0$). 则必$\Sigma n^{-a}\sqrt{a_n}<\infty$.

［提示 $\quad u_n=n^{-a}\sqrt{a_n}\leqslant\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{a_n})^2+(n^{-a})^2\}$.

35. 设 $a_n\downarrow 0(n\to\infty)$. 则 Σa_n 收敛之必要条件为$a_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

［提示］ $2(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n})\geqslant 2n\cdot a_n$. 从而 $na_n\to 0$

$(n\to\infty)$.

36. 设 $na_n\downarrow 0(n\to\infty)$. 则 Σa_n 收敛之必要条件为

$$a_n=o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\quad(n\to\infty).$$

[证] 取 $\nu=[n^{\frac{1}{2}}]$. 则

$$s_n-s_\nu=\sum_{\nu+1}^{n}a_k=\frac{(\nu+1)a_{\nu+1}}{\nu+1}+\frac{(\nu+2)a_{\nu+2}}{\nu+2}+\cdots+\frac{na_n}{n}$$

$$\geqslant na_n\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geqslant na_n\int_{\nu+2}^{n+1}\frac{dx}{x}$$

$$=na_n\ln\left(\frac{n+1}{\nu+2}\right)\sim\frac{1}{2}n(\ln n)a_n.$$

而 $s_n\to 0$, $s_\nu\to 0(n\to\infty)$. 因之 $n(\ln n)a_n\to 0\quad(n\to\infty)$.

37. 若 Σa_n 为一发散级数, a_n 为正项而递降. 试证于 $n\to\infty$ 时即有

$$\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}\sim 1.$$

38. 设 $a_n\downarrow 0$, $\Sigma a_n<\infty$. 试证 $\Sigma n(a_n-a_{n+1})<\infty$.

[提示] $$\sum_1^n a_k=\sum_1^n\{k-(k-1)\}a_k=na_n-\sum_1^{n-1}(a_k-a_{k-1})k,$$

$$na_n\to 0.$$

39. 试讨论下列二级数的敛散性:

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+n-1)\cdot\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-1)}.$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^p.$$

[解] (i)因

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(\nu+n)(\delta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=1+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ c=\nu+\delta-\alpha-\beta.$$

故由高斯比率审敛法可知于 $C>1$ 时级数(i)为收敛. 否则为发散.

(ii) 因 $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^p=1+\dfrac{p}{2n+1}+O\left(\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)=$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故知于 $p>2$ 时收敛,否则发散.

40. 设 α,β 为二实数. 试应用司特林公式以讨论下列级数的收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}\quad(\beta\neq 1).$$

[解] 由司特林公式 $n!\sim(n/e)^n\sqrt{2\pi n}$ 易得

$$u_n\sim\left(\frac{2n}{4^n(n!)^2}\right)^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}\sim Kn^{-\frac{1}{2}\alpha}(\ln n)^{-\beta},\ K>0.$$

故知于 $\alpha>2$ 时或 $\alpha=2,\beta>1$ 时级数为收敛. 否则发散.

41. 设 $u_n\neq 0$, 且

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{\rho}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+a}}\right),$$

此处 a 为一正常数, ρ 为任一实数(常数). 试证

$$\frac{u_n}{n^{\rho}}\to l\neq 0\quad(n\to\infty).$$

[证] 取对数则得 $\ln u_{n+1}-\ln u_n=\dfrac{\rho}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{1+\lambda}}\right)\quad(\lambda>0).$

逐次相加则得

$$\ln u_n-\ln u_1=\rho\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)+\sum_{1}^{n-1}p_k,$$

$$p_k=O(k^{-1-\lambda}).$$

从而可知 $\sum_{1}^{n-1}p_k\to P(n\to\infty)$. 因此上式可写成

$$\ln u_n - \ln u_1 = \rho(\ln n + \nu) + P + o(1) \qquad (n\to\infty).$$

由此得 $u_n = l\cdot n^\rho \cdot \exp\{o(1)\}, l\neq 0$. 亦即 $u_n/n^\rho \to l \qquad (n\to\infty)$.

42. 设

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k.$$

又设有正数 α 使

$$\sum_{n=1}^{\infty}|s_n-\sigma_n|^\alpha<\infty.$$

试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛.

［证］ 由题设可知 $s_n-\sigma_n=o(1)$, 所以只要证明 σ_n 为收敛. 由于

$$\sigma_n-\sigma_{n-1}=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\frac{s_n-\sigma_n}{n},$$

故

$$\sigma_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{s_n-\sigma_n}{n}.$$

若 $\alpha\leqslant 1$, 则由 $\Sigma|s_n-\sigma_n|^\alpha<\infty$ 显见 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|s_n-\sigma_n|}{n}<\infty$. 若 $\alpha>1$, 则

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|s_n-\sigma_n|}{n}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{N}|s_n-\sigma_n|^\alpha\right)^{1/\alpha}\left(\sum_{n=1}^{N}n^{-\beta}\right)^{1/\beta}=O(1)\cdot O(1)$$
$$=O(1),$$

式中 β 适合 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. 所以无论如何 σ_N 总收敛.

43. 写 $\sin_0 x=x, \sin_n x=\sin(\sin_{n-1}x)$ $(n=1,2,\cdots)$. 试证, 当 $n\to\infty$时对 $0<x<\frac{\pi}{2}$一致地有

$$\sin_n x \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{n}{3}}}.$$

［证］ 令$\varphi(x)=\varphi(x,\ c)=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+c}}(c>0)$. 由

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

$$\varphi(x,c)=x-\frac{c}{2}x^3+o(x^3),$$

故对 $c_1<\dfrac{1}{3}<c_2$, 存在充分小的 $x_0>0$, 使当 $0<x<x_0$ 时有

$$\varphi(x,c_2)<\sin x<\varphi(x,c_1).$$

我们注意, 对 $\varphi(x)=\varphi(x,c)$, 由于 $\varphi(x)^{-2}=x^{-2}+c$, 从而令 $\varphi_n(x)=\varphi(\varphi_{n-1}(x))$, $\varphi_0(x)=x$, 则 $\varphi_n(x)^{-2}=x^{-2}+nc$, 即

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+nc}},$$

由是根据 $\varphi(x)$和 $\sin x$ 的单调性, 得

$$\varphi(x,nc_2)<\sin_n x<\varphi(x,nc_1),$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+nc_2}}<\sin_n x<\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+nc_1}}$$

$$(0<x<x_0,\ n=1,2,\cdots).$$

现对任何 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 由于 $0<\sin_n x<\sin_n\dfrac{\pi}{2}\to 0(n\to\infty)$, 故存在 $m=m(x_0)$使当 $n>m$ 时 $0<\sin_n x<x_0$. 于是当 $n>m$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{(\sin_m x)^{-2}+(n-m)c_2}}<\sin_n x$$

$$<\frac{1}{\sqrt{(\sin_m x)^{-2}+(n-m)c_1}}.$$

利用第三章命题 136 的不等式

$$x^{-2}<(\sin x)^{-2}<x^{-2}+1-\frac{4}{\pi^2},$$

可得

$$x^{-2}<(\sin_m x)^{-2}<x^{-2}+m\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right).$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{x^{-2}+m\left(1-\frac{4}{\pi^2}-c_2\right)+nc_2}}<\sin_n x$$

$$<\frac{1}{\sqrt{x^{-2}-mc_1+nc_1}}. \qquad (*)$$

最后，对任给 $\varepsilon>0$，令 $\frac{1}{3(1+\varepsilon)^2}<c_1<\frac{1}{3}<c_2<\frac{1}{3(1-\varepsilon)^2}$，并依次取 $x_0, m=m(x_0)$ 如上. 则当 $n>m$ 时对所有 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 式(*)均成立. 再取 $N=\max\left\{m, \frac{mc_1}{c_1-\frac{1}{3(1+\varepsilon)^2}}, \frac{m\left(1-\frac{4}{\pi^2}-c_2\right)}{\frac{1}{3(1-\varepsilon)^2}-c_2}\right\}$，

则容易看出当 $n>N$ 时对所有 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 均有

$$\sin_n x<\frac{1}{\sqrt{x^{-2}-mc_1+nc_1}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{x^{-2}+\frac{n}{3(1+\varepsilon)^2}}}<\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{n}{3}}},$$

$$\sin_n x>\frac{1}{\sqrt{x^{-2}+m\left(1-\frac{4}{\pi^2}-c_2\right)+nc_2}}$$

$$>\frac{1}{\sqrt{x^{-2}+\frac{n}{3(1-\varepsilon)^2}}}>\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{n}{3}}}.$$

44. 试证，下列级数

$x^{\gamma}+(\sin x)^{\gamma}+(\sin\sin x)^{\gamma}+(\sin\sin\sin x)^{\gamma}+\cdots$

当 $\gamma>2$ 时一致收敛而当 $\gamma\leqslant 2$ 时对 $x\in(0,\pi)$ 皆发散.

[提示] 利用上题的渐近估计即得.

45. 设 Σa_n 是一正项级数. 试证:

(i) 若存在正数 σ 和 m 使 $a_n-a_{n+1}\geqslant m a_n^{2-\sigma}$，则 Σa_n 为收敛，并且 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n=O(a_N^{\sigma})\ (N\to\infty)$;

(ii) 若存在非负实数 σ 和正数 M 使 $a_n-a_{n+1}\leqslant M a_n^{2+\sigma}$，则 Σa_n 发散.

[证] (i) 的条件成立时 $a_{n+1}\leqslant a_n(1-m a_n^{1-\sigma})$. 由是易知 $a_n\downarrow 0$，$\sigma\leqslant 1$. 不妨设 $\sigma<1$. 取自然数 N，使当 $n\geqslant N$ 时有 $m a_n^{1-\sigma}<1$. 于是由不等式 $(1-t)^{\sigma}<1-\sigma t\ (0<t<1)$ 得

$$a_{n+1}^{\sigma}\leqslant a_n^{\sigma}(1-m a_n^{1-\sigma})^{\sigma}<a_n^{\sigma}(1-\sigma m a_n^{1-\sigma})=a_n^{\sigma}-\sigma m a_n.$$

即

$$\sigma m a_n\leqslant a_n^{\sigma}-a_{n+1}^{\sigma}\quad(n\geqslant N).$$

由是可见 Σa_n 收敛，并且

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n\leqslant\frac{1}{\sigma m}a_N^{\sigma}.$$

(ii) 的条件成立时，欲证 Σa_n 发散，我们不妨设 $a_n\to 0$. 从而更不妨设 $\sigma=0$. 由是，$a_{n+1}\geqslant a_n(1-M a_n)$，

$$\ln a_{n+1}\geqslant\ln a_n+\ln(1-M a_n).$$

由于 $\ln(1+t)\sim t\ (t\to 0)$，故对 $\eta>1$，可取 $\delta>0$ 使当 $0<t<\delta$ 时 $\ln(1-t)>-\eta t$. 再取 N 使当 $n\geqslant N$ 时 $M a_n<\delta$，则与此同时有

$$\ln a_{n+1}>\ln a_n-\eta M a_n,$$

$$\sum_{n=N}^{m}a_n>\frac{1}{\eta M}(\ln a_N-\ln a_m).$$

由是可见 Σa_n 发散.

46. 设 $f(x)$ 为区间 $(0, X)$ 上单调下降的正值连续函数, $f(x) < x$, 并且有常数 $q>0, \delta>0$ 适合

$$f(x)=x-qx^{1+\delta}+o(x^{1+\delta}) \quad (x\to 0+).$$

定义 $f_n(x)=f(f_{n-1}(x)), f_0(x)=x$. 试证级数

$$f_0(x)^\gamma+f_1(x)^\gamma+f_2(x)^\gamma+\cdots$$

当 $\gamma>\delta$ 时收敛, 当 $\gamma\leqslant\delta$ 时发散.

[提示] 置 $a_n=f_n(x)^\gamma$, 则易见

$$a_{n+1}=a_n-\gamma q a_n^{1+\frac{\delta}{\gamma}}+o(a_n^{1+\frac{\delta}{\gamma}}) \quad (n\to\infty).$$

由是利用上题的结果即得.

§2. 若干渐近估计及切比晓夫质数定理的证法

在命题 47, 48, 50, 51 中, 记号 $\varphi\in\Phi$ 表示 φ 是一个在某区间 $(0, a)$ 上取正值并且单调增加的连续函数, $\varphi(0+)=0$. 对于这种函数, 某些渐近估计之成立与否可以简洁地加以刻划.

47. 设 $\varphi\in\Phi$. 则渐近估计

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}dt=O(\varphi(\delta)) \quad (\delta\to 0+)$$

成立的充分必要条件是: 存在常数 $\eta>1$ 使

$$\varliminf_{\delta\to 0+}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}>1. \qquad \text{(Бари-Стечикин)}$$

[证] 设 $A>0$ 和 $\delta_0>0$ 使对所有适合 $0<\delta<\delta_0$ 的 δ 有

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}dt\leqslant A\varphi(\delta).$$

则对任意 $\eta>1$, 当 $0<\delta<\delta_0/\eta$ 时有

$$\int_\delta^{\eta\delta}\frac{\varphi(t)}{t}dt\leqslant\int_0^{\eta\delta}\frac{\varphi(t)}{t}dt\leqslant A\varphi(\eta\delta).$$

由于 $\varphi(t)$ 的单调性,

$$\int_{\delta}^{\eta\delta}\frac{\varphi(t)}{t}dt\geqslant\varphi(\delta)\int_{\delta}^{\eta\delta}\frac{dt}{t}=\varphi(\delta)\ln\eta.$$

从而

$$\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}\geqslant\frac{\ln\eta}{A}.$$

现在取 η 使 $\ln\eta>A$. 则

$$\underline{\lim}_{\delta\to0+}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}>1.$$

反之, 设有 $\eta>1$ 使 $\underline{\lim}_{\delta\to0+}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}>1$. 则必有 $\alpha>0$ 和 $\delta_0>0$, 使当 $0<\delta<\delta_0$ 时有

$$\varphi(\eta\delta)\geqslant\eta^{\alpha}\varphi(\delta).$$

对适合 $0<t<\delta$ 的任意 t, 取自然数 n 使

$$\eta^{-n}\delta\leqslant t<\eta^{-n+1}\delta.$$

则有

$$\begin{aligned}\varphi(t)&\leqslant\eta^{-\alpha}\varphi(\eta t)\leqslant\cdots\leqslant\eta^{-n\alpha+\alpha}\varphi(\eta^{n-1}t)\\&\leqslant\left(\eta\frac{t}{\delta}\right)^{\alpha}\varphi(\delta).\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}dt\leqslant\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\alpha}\varphi(\delta)\quad\int_0^{\delta}\frac{dt}{t^{1-\alpha}}=\frac{\eta^{\alpha}}{\alpha}\varphi(\delta)\quad(0<\delta<\delta_0).$$

48. 设 $\varphi\in\Phi$. 则渐近估计

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{1}{k}\right)=O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)\quad(n\to\infty)$$

成立的充分必要条件是: 存在 $\eta>1$ 使

$$\underline{\lim}_{\delta\to0+}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}>1.$$

［证］ 设 $\frac{1}{n+1}<\delta\leqslant\frac{1}{n}$. 则

$$\varphi(\delta)^{-1}\int_0^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}dt$$

$$\leqslant \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\varphi(\delta)^{-1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}dt$$

$$\leqslant \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{1}{k}\right)+1.$$

又

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{1}{k}\right)\leqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k-1}}\frac{\varphi(t)}{t}dt+\frac{1}{n}$$

$$\leqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(t)}{t}dt+1.$$

所以由命题 47 即得本命题的结论.

49. 设 $\alpha>0$, 而 β 是任意实数. 则有下列渐近估计成立:

$$\int_0^{\delta}t^{\alpha-1}|\ln t|^{\beta}dt=O(\delta^{\alpha}|\ln\delta|^{\beta})\quad(\delta\to 0+).$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\ln k)^{\beta}}{k^{\alpha+1}}=O\left(\frac{(\ln n)^{\beta}}{n^{\alpha}}\right)\quad(n\to\infty).$$

[证] 置 $\varphi(t)=t^{\alpha}|\ln t|^{\beta}$, 由

$$\varphi'(t)=t^{\alpha-1}|\ln t|^{\beta-1}(\alpha|\ln t|-\beta)\quad(0<t<1)$$

看出当 $a>0$ 充分小时 $\varphi'(t)>0 \quad (0<t<a)$. 所以 $\varphi\in\Phi$. 显然, 对任意 $\eta>1$,

$$\lim_{\delta\to 0+}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}=\eta^{\alpha}>1.$$

由是根据命题 47 和 48 即得本题中的两个渐近估计.

50. 设 $\varphi\in\Phi$. 又设 $p>0$. 试证渐近估计

$$\int_{\delta}^{a}\frac{\varphi(t)}{t^{p+1}}dt=O\left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{p}}\right)\qquad(\delta\to 0+)$$

成立的充分必要条件是: 存在 $\eta>1$ 使

$$\overline{\lim_{\delta\to 0+}}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}<\eta^{p}. \qquad \text{(Бари-Стечикин)}$$

[证] 设 $A>0$ 和 $\delta_0>0$ 使

$$\int_{\delta}^{a}\frac{\varphi(t)}{t^{p+1}}dt\leqslant A\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{p}}\qquad (0<\delta<\delta_0).$$

则对任意 $\eta>1$，当 $0<\eta\delta<\delta_0$ 且 $2^{\frac{1}{p}}\eta\delta<a$ 时有

$$A\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{p}}\geqslant\int_{\delta}^{a}\frac{\varphi(t)}{t^{p+1}}dt\geqslant\int_{\delta}^{\eta\delta}\frac{\varphi(t)}{t^{p}}\frac{dt}{t}$$

$$\geqslant\int_{\delta}^{\eta\delta}\frac{dt}{t}\cdot\frac{1}{A}\int_{t}^{a}\frac{\varphi(s)}{s^{p+1}}ds\geqslant\int_{\delta}^{\eta\delta}\frac{dt}{t}\cdot\frac{1}{A}\int_{\eta\delta}^{2^{\frac{1}{p}}\eta\delta}\frac{\varphi(s)}{s^{p+1}}ds$$

$$\geqslant\ln\eta\cdot\frac{\varphi(\eta\delta)}{A}\int_{\eta\delta}^{2^{\frac{1}{p}}\eta\delta}\frac{ds}{s^{p+1}}=\ln\eta\cdot\frac{\varphi(\eta\delta)}{A}\cdot\frac{1}{2p(\eta\delta)^{p}}.$$

即

$$\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}\leqslant\frac{2pA^{2}}{\ln\eta}\eta^{p}.$$

由是

$$\overline{\lim_{\delta\to0+}}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}=o(\eta^{p})\quad(\eta\to\infty).$$

所以存在 $\eta>1$ 使

$$\overline{\lim_{\delta\to0+}}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}<\eta^{p}.$$

反之，设 $\overline{\lim\limits_{\delta\to+0}}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}<\eta^{p}$. 则有正数 $\alpha<p$ 和 δ_0, 使当 $0<\delta<\delta_0$ 时有

$$\varphi(\eta\delta)<\eta^{p-\alpha}\varphi(\delta).$$

对任意适合 $\delta\leqslant t<\delta_0$ 的 t, 取自然数 n 使

$$\eta^{n-1}\delta\leqslant t<\eta^{n}\delta.$$

则
$$\varphi(t)\leqslant\eta^{p-\alpha}\varphi(\eta^{-1}t)\leqslant\cdots\leqslant\eta^{n(p-\alpha)}\varphi(\eta^{-n}t)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\eta t}{\delta}\right)^{p-\alpha}\varphi(\delta).$$

并且由是还可看出 $1\to\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{p}}$. 因此当 $0<\delta<\delta_0$ 时

$$\int_{\delta}^{1}\frac{\varphi(t)}{t^{p+1}}dt=\left\{\int_{\delta}^{\delta_0}+\int_{\delta_0}^{1}\right\}\frac{\varphi(t)}{t^{p+1}}dt$$

$$\leqslant\int_{\delta}^{\delta_0}\frac{dt}{t^{\alpha+1}}\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{p-\alpha}\varphi(\delta)+O(1)=O\left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta^p}\right).$$

51. 设 $\varphi\in\Phi$. 又设 $p>0$. 则渐近估计

$$\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{k}\right)=O\left(n^p\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)\quad(n\to\infty)$$

成立的充分必要条件是: 存在 $\eta>1$ 使

$$\overline{\lim_{\delta\to0+}}\frac{\varphi(\eta\delta)}{\varphi(\delta)}<\eta^p.$$

[提示] 易知题中的渐近估计与

$$\int_{\delta}^{a}\frac{\varphi(t)}{t^{p+1}}dt=O\left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta^p}\right)\quad(\delta\to0+)$$

等价.

52. 设 $\alpha>0$ 而 β 为任意实数. 则有下列渐近估计成立:

$$\int_{\delta}^{a}t^{-\alpha-1}|\ln t|^{\beta}dt=O(t^{-\alpha}|\ln t|^{\beta})\quad(\delta\to0+).$$

$$\sum_{k=2}^{n}k^{\alpha-1}(\ln k)^{\beta}=O(n^{\alpha}(\ln n)^{\beta})\quad(n\to\infty).$$

[提示] 于命题 50 及51 中置

$$\varphi(t)=t^{p-\alpha}|\ln t|^{\beta}\quad(0<t<a).$$

53. 设 α,β 为实数, $\sum\limits_{1}^{n}\alpha_k\sim n^{\alpha}\quad(n\to\infty)$. 试证下列渐近估计:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\ln k)^{\beta}\begin{cases}\sim n^{\alpha}(\ln n)^{\beta} & (\alpha>0\text{ 时}),\\ =C+O\{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta} & (\alpha<0\text{ 时}).\end{cases}$$

并再讨论 $\alpha=0,\beta<0$ 的情形. (Francis-Littlewood)

[证] 处理本题的方法主要是根据下列的阿倍尔分部求和法(参考第一章 §1):

(1) $\sum_{1}^{n} a_k b_k = s_n b_n - \sum_{1}^{n-1} s_k (b_{k+1} - b_k) \quad \left(s_n = \sum_{1}^{n} a_k \right)$,

(2) $\sum_{1}^{n} a_k b_k = (s_n - s) b_n + s b_1 - \sum_{1}^{n-1} (s_k - s)(b_{k+1} - b_k)$

$(s = \lim s_n)$.

首先，当 $\alpha \neq 0$ 时，于(1)取 $b_1 = 0, b_k = (\ln k)^\beta \ (k > 1)$ 得

$$\sum_{k=2}^{n} a_k (\ln k)^\beta = s_n (\ln n)^\beta - a_1 (\ln 2)^\beta$$

$$- \sum_{k=2}^{n-1} s_k \{[\ln(k+1)]^\beta - (\ln k)^\beta\} = s_n (\ln n)^\beta + \sigma_n$$

若 $\alpha > 0$，则由命题 52

$$\sigma_n = -a_1 (\ln 2)^\beta - \sum_{n=2}^{n-1} s_k \cdot O\left\{\frac{(\ln k)^{\beta-1}}{k}\right\}$$

$$= O\left\{\sum_{k=2}^{n-1} k^{\alpha-1} (\ln k)^{\beta-1}\right\} = O\{n^\alpha (\ln n)^{\beta-1}\}.$$

若 $\alpha < 0$，则当 $n \to \infty$ 时 σ_n 为收敛，记其极限为 C，则

$$\sigma_n = C - \sum_{k=n}^{\infty} s_k \cdot O\left\{\frac{(\ln k)^{\beta-1}}{k}\right\} = C + O\left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha-1} (\ln k)^{\beta-1}\right\}$$

$$= C + O\{n^\alpha (\ln n)^{\beta-1}\}.$$

所以我们证得

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k (\ln k)^\beta = C + s_n (\ln n)^\beta + O\{n^\alpha (\ln n)^{\beta-1}\},$$

其中 C 为常数，且当 $\alpha > 0$ 时 $C = 0$. 这个结论比所要证的还强些. 事实上，以 $s_n \sim n^\alpha$ 代入即得所要证的结论.

然后再考虑 $\alpha = 0$, $\beta < 0$ 的情形. 此时 $s_n \to s = 1$. 可应用分部求和公式(2). 易得

$$\sum_{2}^{n} a_k (\ln k)^\beta = o\{(\ln n)^\beta\} + 0 + \sum_{2}^{n-1} o(1) \cdot O\left\{\frac{(\ln k)^{\beta-1}}{k}\right\}.$$

由于 $\beta-1<-1$，故由收敛性可写

$$\sum_{2}^{n-1} o\left\{\frac{(\ln k)^{\beta-1}}{k}\right\}=\left(\sum_{2}^{\infty}-\sum_{n}^{\infty}\right)=C-\sum_{n}^{\infty}\varepsilon_k\frac{(\ln k)^{\beta-1}}{k},$$

其中

$$\sum_{n}^{\infty}\leqslant(\operatorname*{Max}_{k\geqslant n}\varepsilon_k)\sum_{n}^{\infty}\frac{(\ln k)^{\beta-1}}{k}\leqslant o(1)\int_{n-1}^{\infty}\frac{(\ln k)^{\beta-1}}{x}dx$$

$$=o(1)\frac{\{\ln(n-1)\}^{\beta}}{-\beta}.$$

因此总结得

$$\sum_{2}^{n} a_k(\ln k)^{\beta}=C+o\{(\ln n)^{\beta}\}\quad(\alpha=0,\ \beta<0).$$

54. 设 $\sum_{1}^{n} a_k=n+O(\sqrt{n})$. 试证

$$\sum_{2}^{n}\frac{a_k}{\ln k}=\int_{2}^{n}\frac{dx}{\ln x}+O\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)\quad(n\to\infty).$$

[提示] 在上题证明之式(1)中令 $b_1=0, a_1=s_1=0$，于是得

$$\sum_{2}^{n}\frac{a_k}{\ln k}=\frac{s_n}{\ln n}+\sum_{2}^{n-1}s_k\left\{\frac{1}{\ln k}-\frac{1}{\ln(k+1)}\right\}.$$

对特殊情形 $a_k=1$ 则得

$$\sum_{2}^{n}\frac{1}{\ln k}=\frac{n-1}{\ln n}+\sum_{2}^{n-1}(k-1)\left\{\frac{1}{\ln k}-\frac{1}{\ln(k+1)}\right\}.$$

二式相减得

$$\sum_{2}^{n}\frac{a_k}{\ln k}-\sum_{2}^{n}\frac{1}{\ln k}=O\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)+\sum_{2}^{n-1}O(\sqrt{k})\cdot O\left(\frac{1}{k(\ln k)^2}\right).$$

由命题 52,

$$\sum_{2}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}(\ln k)^2}=O\left(\frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^2}\right).$$

又

$$\sum_{2}^{n}\frac{1}{\ln k}-\int_{2}^{n}\frac{dx}{\ln x}=O(1),$$

故总结得

$$\sum_{2}^{n}\frac{a_k}{\ln k}=\int_{2}^{n}\frac{dx}{\ln x}+O\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right).$$

55. 设 x 为任意正整数，p 表示不超过 x 的任一质数．试证

$$\sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]\ln p=x\ln x+O(x)\quad(x\to\infty),$$

这里$\left[\frac{x}{p}\right]$表示不超过$\frac{x}{p}$的最大整数．

［证］ 容易看出 $x!$ 的质因子分解式可以写成:

$$x!=\prod_{p\leqslant x}p^{a_p}$$

此处

$$a_p=\left[\frac{x}{p}\right]+\left[\frac{x}{p^2}\right]+\left[\frac{x}{p^3}\right]+\cdots.$$

事实上，构成乘积 $x!$的诸因子 1，2，…，x 中，为 p 的倍数者凡 $\left[\frac{x}{p}\right]$个，又为 p^2 的倍数者凡 $\left[\frac{x}{p^2}\right]$个，再为 p^3 的倍数者凡$\left[\frac{x}{p^3}\right]$个，等等．其中任何一个因子 $n\leqslant x$，若含 p 的最高次方为 s，即 $n=p^s\cdot m$，而m不再含因子 p，则 n 在上述计数中，作为 $p, p^2, \cdots, p^s$ 的倍数总共计算了 s 次．由是可知 $x!$ 中所含 p 的方次总数即等于 a_p.

两端取对数，则

$$\ln x!=\sum_{p\leqslant x}a_p\ln p=\sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]\ln p+\sum_{p\leqslant x}\left(\left[\frac{x}{p^2}\right]+\left[\frac{x}{p^3}\right]+\cdots\right)\ln p.$$

显然

$$\sum_{p\leqslant x}\left(\left[\frac{x}{p^2}\right]+\left[\frac{x}{p^3}\right]+\cdots\right)\ln p\leqslant x\sum_{p\leqslant x}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\right)\ln p=$$

$$=x\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^2}\left(\frac{p}{p-1}\right)\ln p\leqslant 2x\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p^2}=\overline{O}(x)\quad(x\to\infty).$$

因此

$$\ln x!=\sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]\ln p+O(x)\quad(x\to\infty).$$

在另一方面，我们有司特林公式:

$$\ln x!=x\ln x+O(x)\quad(x\to\infty).$$

故由两者比较得:

$$\sum_{p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]\ln p=x\ln x+O(x)\quad(x\to\infty).$$

56. 设$\{a_n\}$为一正实数叙列而满足下列关系:

$$A(x)=\sum_{n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right]a_n=x\ln x+O(x)\quad(x\to\infty),$$

这里$\left[\frac{x}{n}\right]$表$\frac{x}{n}$的整数部分. 又令 $S(x)=\sum_{n\leqslant x}a_n$, 则必存在两个正常数$\alpha,\beta$使得对于充分大的$x$常成立下列关系:

$$\alpha x\leqslant S(x)\leqslant\beta x.\qquad\text{(Shapiro)}$$

[证] 本命题是一个弱陶贝尔 (A. Tauber)型定理. 利用关系$[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]\geqslant 0$可得

$$O(x)=A(x)-2A\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n\leqslant x}\left(\left[\frac{x}{n}\right]-2\left[\frac{x}{2n}\right]\right)a_n=$$

$$=\sum_{n\leqslant\frac{x}{2}}\left(\left[\frac{x}{n}\right]-2\left[\frac{x}{2n}\right]\right)a_n+\sum_{\frac{x}{2}<n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right]a_n\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{\frac{x}{2}<n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right]a_n=\sum_{\frac{x}{2}<n\leqslant x}a_n=S(x)-S\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0.$$

由$O(x)$的意义可知必有一正常数K_1使得$0\leqslant S(x)-S\left(\frac{x}{2}\right)<K_1x$

对一切 x 均成立. 故

$$0\leqslant S(x/2^{\gamma})-S(x/2^{\gamma+1})<K_1\cdot\frac{x}{2^{\gamma}}\quad(\gamma=0,1,2,\cdots).$$

各式相加即得 $S(x)<2K_1x$. 故取 $\beta=2K_1$ 即得 $S(x)$ 的一个上界.

既已证明 $S(x)=O(x)$，故由命题所设条件可得

$$\sum_{n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right]a_n=\sum_{n\leqslant x}a_n\left\{\frac{x}{n}+O(1)\right\}=x\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}+O(S(x))$$
$$=x\ln x+O(x).$$

于是得

$$T(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}=\ln x+O(1)\quad(x\to\infty).$$

因此可写成 $T(x)=\ln x+R(x)$, 此处 $|R(x)|\leqslant K_2x$. 今假定 $0<\alpha<1$. 则

$$\sum_{\alpha x<n\leqslant x}\frac{a_n}{n}=T(x)-T(\alpha x)=\ln\frac{1}{\alpha}+R(x)-R(\alpha x).$$

由是我们得

$$\frac{1}{\alpha x}S(x)\geqslant\frac{1}{\alpha x}\sum_{\alpha x<n\leqslant x}a_n\geqslant\ln\frac{1}{\alpha}-2K_2.$$

如在上式中取 $\alpha=\exp(-2K_2-1)$. 则上式即变为

$$S(x)\geqslant\alpha x.$$

命题至此证完.

57. 设将不超过 x 的质数 p 的个数记作 $\pi(x)$, 亦即

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1.$$

则必存在两个正常数 α 及 β 使得对于一切充分大的 x 常有

$$\alpha\frac{x}{\ln x}\leqslant\pi(x)\leqslant\beta\frac{x}{\ln x}.\qquad\text{(Чебышев)}$$

［证］ 今在命题 49 中取

$$a_n=\begin{cases}\ln n & (\text{当 } n \text{ 为一质数时}),\\ 0 & (\text{当 } n \text{ 非质数时}).\end{cases}$$

则由命题 55 可见$\{a_n\}$恰好满足命题 56 的条件．故有结论

$$\alpha x\leqslant\theta(x)\leqslant\beta x,$$

此处 $\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p$．又因 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1$．故由 $\theta(x)$的定义可见

$$\{\pi(x)-\pi(x^{\frac{1}{2}})\}\ln x^{\frac{1}{2}}=\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\ln x^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{p\leqslant x}\ln p$$
$$=\theta(x)\leqslant\pi(x)\ln x.$$

于是由 $\theta(x)$的不等式立即得出

$$\pi(x)\geqslant\frac{\theta(x)}{\ln x}\geqslant\alpha-\frac{x}{\ln x}.$$

在另一方面　$\pi(x)-\pi(x^{\frac{1}{2}})\leqslant2\beta\frac{x}{\ln x}.$

故于上式中令 x 依次换作$x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{8}},\cdots$并逐项相加则可得

$$\pi(x)\leqslant\lambda\cdot\frac{x}{\ln x},$$

此处 λ 为一正常数．因此切比晓夫定理已完全被证明了．

58. 试证萨比洛(H. S. Shapiro, 1928—)的弱陶贝尔型定理可被扩充成如下的形式：设 $a>0$．又设 $\varphi(t)$为一正值单调增加函数并满足关系：

$$A(x)=\int_1^x\left[\frac{x}{t}\right]d\varphi(t)=x^a\ln x+O(x^a),\quad(x\to\infty)$$

此处 $x\to\infty$系经过这样的实数叙列而使上式中的黎曼-斯提捷积分恒有意义．于是必有二正常数 β_1 及 β_2 使当 x 甚大时常有：

$$\beta_1x^\alpha\leqslant\varphi(x)\leqslant\beta_2x^\alpha,$$

其中 β_1 决不可能大于 $1/\alpha$, 而 β_2 决不可能小于 $1/\alpha$.

［提示］ 证明步骤基本上仿照萨比洛定理的原来证法（只要将加式改成相当的积分即可）．但在证明的过程中，对于 $0<\alpha<1$ 的情形却必须作特殊的处理．至于推证 β_1 及 β_2 的存在范围：$\beta_1\leqslant1/\alpha\leqslant\beta_2$, 则利用部分积分法便可得出．

59. 设$\{a_n\}$为一正实数叙列而满足下列关系

$$A(x)=\sum_{n\leqslant x}\sqrt{\left[\frac{x}{n}\right]}\cdot a_n=\sqrt{x}\ln x+O(\sqrt{x})\qquad(x\to\infty)$$

则必存在二正常数 β_1 及 β_2 使当 x 充分大时常有关系

$$\beta_1\sqrt{x}\leqslant\sum_{n\leqslant x}\alpha_n\leqslant\beta_2\sqrt{x}.$$

[提示] 这显然是命题 58 的特例. 当然也可以单独证明它. 但在证明形式上要略比命题 56 复杂一些.

§3. 有关无穷大强度的问题

本节主要是讨论无穷大强度的比较问题. 在本章开始时已说到,若 $f/\phi\to\infty(x\to\infty)$, 则可记作 $f\succ\phi$ 或 $\phi\prec f$. 此时可称 f 强于ϕ,或 ϕ 较 f 为弱. 这意思也就是说,f 的增大比 ϕ 为速,或 ϕ 的增大比 f 为慢.

若不论 x 如何大时,总有 $0<\delta<f/\phi<M$, 其中 δ, M 均为固定的正数,则可记作 $f\asymp\phi$. 例如切比晓夫的质数定理, 其意思就是:

$$\pi(x)\asymp\frac{x}{\ln x},\qquad(x\to\infty).$$

又若 f/ϕ 趋近于一确定之极限(异于零). 则有时亦这样表示: $f\asymp\phi$. 这意思亦即相当于以前所用过的记号 $f=\overline{O}(\phi)$.

60. 试证$(\ln\ln n)^{-n}\prec e^{-n}\prec n^{\ln n}\quad(n\to\infty)$.

[证] 因 $\ln\ln n\succ e$, 故$(\ln\ln n)^{-n}\prec e^{-n}$. 又因$(\ln n)^2\prec n$,故 $n^{-\ln n}=e^{-(\ln n)^2}\succ e^{-n}\quad(n\to\infty)$.

61. 试按照渐增的强度将下列的无穷大变量排列起来:

$$x^{e^x},\quad e^{x^x},\quad(\ln x)^{(\ln x)^{\ln x}}\qquad(x\to\infty).$$

[提示] 通过换底手续一律化成以 e 为底的指数函数即可加

以比较.

62. 若 p,q 代表任意二正数，试在无穷大 $x(\ln x)^q\ln\ln x$ 与 $x(\ln x)^p$ 之间插入另一个无穷大变量，其中 $x\to\infty$.

63. 设 $\phi(x)\prec f(x)$. 试证必可找到两个无穷叙列$\{\phi_n(x)\}$, $\{f_n(x)\}$ 使 $\phi\prec\phi_1\prec\phi_2\prec\phi_3\prec\cdots\prec\phi_n\prec\cdots\prec f$ 及 $f\succ f_1\succ f_2\succ f_3\succ\cdots\succ\phi$.

［证］ 只须取

$$\phi_{n-1}=\phi^{\frac{1}{n}}f^{\frac{n-1}{n}}\quad(n=2,3,4,\cdots).$$

即可见 $\phi_n/\phi_{n-1}=(f/\phi)^{\frac{1}{n(n+1)}}\to\infty\,(x\to\infty)$, $f/\phi_n=(f/\phi)^{\frac{1}{n+1}}\to\infty$ $(x\to\infty)$. 故得 $\phi\prec\phi_1\prec\phi_2\prec\phi_3\prec\cdots\prec f$. 同理，如取

$$f_{n-1}=f^{\frac{1}{n}}\phi^{\frac{n-1}{n}}\quad(n=2,3,4,\cdots),$$

则易知 $f\succ f_1\succ f_2\succ f_3\succ\cdots\succ\phi$.

［注意］ 本命题的意思就是说：无穷大变量的分布是到处稠密的. 因为在任何两者之间，总有无限多个无穷大介于其间.

64. 试造一例以表明这样的事实：当 $x\to\infty$时，f, $\phi\to\infty$，而 f/ϕ 既不趋于∞，亦不趋于 0，而又不保持在两个固定的正数之间.

［解］ 可以先取两个连续的上升函数 ϕ_1 及 ϕ_2，此处 $\phi_1>\phi_2$, $\phi_1\uparrow\infty$, $\phi_2\uparrow\infty$, $\phi_1\succ\phi_2(x\to\infty)$. 今取一系列的坐标值:

$$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<\cdots,\ (x_n\to\infty).$$

令 P_1,P_3,P_5, …等表曲线 $y=\phi_1(x)$上的点，其横坐标依次为 x_1, $x_3,x_5,\cdots$. 又令 $P_2,P_4,P_6,\cdots$为曲线 $y=\phi_2(x)$上的点，其坐标依次为 $x_2,x_4,x_6,\cdots$. 于是依次将 P_1,P_2, $P_3,P_4,\cdots$各点用折线联结起来. 这样便得到一条无限延长的折线 L，起伏于 $y=\phi_1(x)$及 $y=\phi_2(x)$之间. 令 L 的方程为 $y=f(x)$. 则按定义有:

$$f=f(x)\begin{cases}=\phi_1(x), & \text{当 } x=x_1,x_3,x_5,\cdots;\\ =\phi_2(x), & \text{当 } x=x_2,\ x_4,x_6,\cdots.\end{cases}$$

于是若再定义另一函数 $\phi=\phi(x)=\sqrt{\phi_1\phi_2}$，则不难看出 f/ϕ 即为本题所须之一例.

65. (杜布窪-雷芲定理)设 $\phi_1\prec\phi_2\prec\phi_3\prec\cdots$，其中每一个 ϕ_n 都是增函数. 则常有另一增大更速的函数 f 存在，使得对一切 n 而言都有

$$\phi_n\prec f.$$

[证] 在未证之前首先指出一点: 即条件 $\phi_{n+1}\succ\phi_n$ 并不保证有一确定大数 A 存在，使得 $\phi_{n+1}\geqslant\phi_n$ 对一切 $x>A$ 和 $n>A$ 都成立. 最简单的例子便是 $\phi_n=x^n/n!$. 故在一般情形下，

$$\phi_{n+1}\succ\phi_n\Longrightarrow\phi_{n+1}>\phi_n\quad(x>x_n).$$

其中 x_n 可能 $\uparrow\infty\quad(n\to\infty)$.

但无论如何,却总可做出一新的叙列

$$\psi_1\prec\psi_2\prec\psi_3\prec\cdots\prec\psi_n\prec\cdots,$$

而 x 合于(i) $\psi_n\equiv\phi_n(x>x_n^*)$, (ii) $\psi_n\leqslant\psi_{n+1}$ 对一切 x 及 n 均成立. 此种叙列可由归纳法作成. 例如, 当已作成 $\psi_1\leqslant\psi_2\leqslant\cdots\leqslant\psi_n$ 之后, 则由于 $\Phi_n\sim\psi_n\prec\phi_{n+1}(x\to\infty)$, 故必有一 $x^*{}_{n+1}$ 存在，使得对一切 $x>x^*{}_{n+1}$ 而言总是 $\phi_{n+1}>\psi_n$. 因此可取

$$\psi_{n+1}=\begin{cases}\phi_{n+1} & (x>x^*{}_{n+1}),\\ \mathrm{Max}(\psi_n,\phi_{n+1}) & (x\leqslant x^*{}_{n+1}).\end{cases}$$

此时显然有 $\psi_1\leqslant\psi_2\leqslant\cdots\leqslant\psi_n\leqslant\psi_{n+1}$.

于是为要定义函数 $f(x)$，可先规定此函数在 $x=n$ 处之值为 $f(n)=\psi_n(n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$. 至于 $f(x)$ 在 $(n,n+1)$ 间的定义可由填充法补足,而使之合于条件:

$$\psi_n(x)<f(x)<\psi_{n+1}(x)\quad(n<x<n+1).$$

此处 $f(x)$ 并可规定为连续的增函数. 显然这样定义的 f 必具性质 $f/\phi_n\to\infty\quad(x\to\infty)$. 故命题证毕.

66. 试证: 当任意给定一个连续的增函数 $\phi(x)$时，总可作出

一个整函数 $f(x)$ 使得 $f(x)\succ\phi(x)$. (Poincaré)

［证］ 所谓整函数即是指收敛半径为∞的幂级数 $\sum a_n x^n$ 所代表的函数而言. 下面的简捷证法系由波雷耳 (E. Borel, 1871—1956)所作.

令 $\Phi(x)$ 为任一函数 (例如 $\Phi=\phi^2$) 而使 $\Phi\succ\phi$, 今取一个上升数列 $a_n\uparrow\infty$ 及另一数列 $\{b_n\}$ 使合条件

$$a_1<b_2<a_2<b_3<a_3<\cdots.$$

置

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu_n},$$

此处 ν_n 为整数值而 $\nu_{n+1}>\nu_n$. 显然这一级数对一切 x 都收敛.

今若 $a_n\leqslant x<a_{n+1}$. 则 $f(x)>(a_n/b_n)^{\nu_n}$. 由于 $a_n>b_n$, 故可以如此选取 ν_n 使得(i) $\nu_n>\max(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{n-1})$; (ii) $(a_n/b_n)^{\nu_n}>\Phi(a_{n+1})$. 于是 $f(x)>\Phi(a_{n+1})>\Phi(x)$. 故得 $f\succ\phi$.

67. 设 $\phi_n(x)$ 为 x 的增函数而有

$$\phi_1\succ\phi_2\succ\phi_3\succ\cdots\succ\phi_n\succ\cdots\succ1.$$

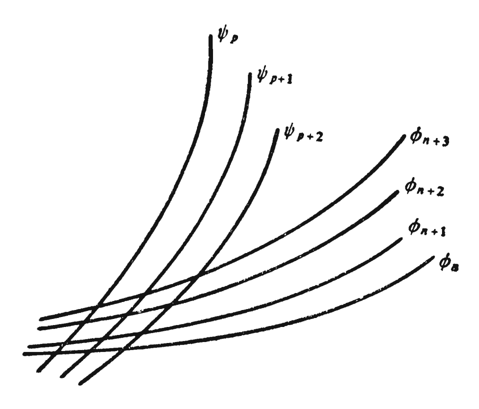
求证必有一增函数 $f(x)$ 存在, 使得 $\phi_n\succ f\succ1$ 对一切 x 均成立.

68. 给定 $\phi_1\prec\phi_2\prec\phi_3\prec\cdots\prec\phi_n\prec\cdots\prec\Phi$, 则必有函数 f 使得对于一切 n 值而有 $\phi_n\prec f\prec\Phi$, 若给定 $\psi_1\succ\psi_2\succ\psi_3\succ\cdots\succ\psi_n\succ\cdots\psi$, 则必有 f 使对于一切 n 值而有 $\psi_n\succ f\succ\psi$.

又若给定一个速度递增的无穷大叙列 $\{\phi_n\}$ 及一个速度递降的叙列 $\{\psi_n\}$, 且对于一切 n 及 p 总有 $\phi_n\prec\psi_p$, 则必可得一函数 f 使对于一切 n,p 而言总是

$$\phi_n\prec f\prec\psi_p. \qquad \text{(Hadamard)}$$

［提示］ 为要证本命题之后一部分, 可考虑下列图形: 譬如, 为要定义 f, 我们可以设法作这样的一条函数曲线 $y=f(x)$: 第一, 它必须始终保持与坐标轴成锐角; 第二, 它总是由下而上的穿过一切曲线 $y=\phi_n(x)$; 第三, 它总是自上而下的透过一切曲线



题 68 图. 供构作 $y=f(x)$时参考

$y=\psi_p(x)$.

69. 设 $f(x)$在$(0,\infty)$内有二阶导数, 且对于某一实数值 α 合于下列条件:

$$f(x)=o(x^{\alpha})\qquad (x\to 0+\text{或 } x\to\infty\text{时}),$$

$$f''(x)<O(x^{\alpha-2})\quad (x\to 0+\text{或 } x\to\infty\text{时}),$$

则必有 $f'(x)=o(x^{\alpha-1})$ $(x\to 0+$或 $x\to\infty)$. (Hardy-Littlewood)

[证] 令 δ 为任一实数$(0<\delta<1)$. 又取 $x>0$, 显然有

$$f(x\pm\delta x)-f(x)\mp\delta xf'(x)=\frac{1}{2}\delta^2x^2f''(x\pm\theta\delta x)\quad (0<\theta<1).$$

由第二条件显然可得一常数M使得

$$f''(x\pm\theta\delta x)<M(1\pm\theta\delta)^{\alpha-2}x^{\alpha-2}\begin{cases}\leqslant Mx^{\alpha-2}(1+\delta)^{\alpha-2} & (\alpha\geqslant 2),\\ \leqslant Mx^{\alpha-2}(1-\delta)^{\alpha-2} & (\alpha\leqslant 2).\end{cases}$$

以此代入前一式则得

$$o(x^{\alpha})\mp\delta xf'(x)\begin{cases}\leqslant\dfrac{1}{2}M\delta^2x^{\alpha}(1+\delta)^{\alpha-2} & (\alpha\geqslant 2).\\ \leqslant\dfrac{1}{2}M\delta^2x^{\alpha}(1-\delta)^{\alpha-2} & (\alpha\leqslant 2).\end{cases}$$

因此于 $x\to 0+$时(或 $x\to\infty$时)我们有

$$-\frac{1}{2}M\delta(1+\delta)^{\alpha-2}\leqslant\underline{\lim}x^{1-\alpha}f'(x)\leqslant\overline{\lim}x^{1-\alpha}f'(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}M\delta(1+\delta)^{\alpha-2}\quad(\alpha\geqslant 2).$$

$$-\frac{1}{2}M\delta(1-\delta)^{\alpha-2}\leqslant\underline{\lim}x^{1-\alpha}f'(x)\leqslant\overline{\lim}x^{1-\alpha}f'(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}M\delta(1-\delta)^{\alpha-2}\quad(\alpha\leqslant 2).$$

由于 δ 可以任意小，故最后命 $\delta\to 0+$ 便得出

$$\lim x^{1-\alpha}f'(x)=0.$$

§4. 若干渐近展开公式及其应用

70. 设当 $x\to 0$ 时，依次决定常数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 如下:

$$\lim f(x)=a_0,\quad \lim\frac{f(x)-a_0}{x}=a_1,$$

$$\lim\frac{f(x)-(a_0+a_1x)}{x^2}=a_2,\cdots,$$

$$\lim\frac{f(x)-(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})}{x^n}=a_n.$$

则有渐近展开式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)\quad(x\to 0).$$

71. (泰勒公式)设 $f(x)$在包含 x_0 的区间内有直至 $n-1$ 阶的导数，且在 x_0 处有 n 阶导数. 则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+$$

$$+o((x-x_0)^n)(x\to x_0).$$

又设 $f^{(n)}(x)$在包含 x_0 的区间上绝对连续，则在同一区间上有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_n)^n$$

$$+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

72. 试证自然对数的底 e 是无理数.

［证］ 如不然，设 e 是有理数$\frac{n}{m}$，这里 m，n 是互质的正整数. 将泰勒公式应用于 $f(x)=e^{-x}, x_0=0, x=1$, 得

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1 e^{-t}(1-t)^n dt.$$

以$(-1)^{n+1}n!$乘上式两端并以 $e^{-1}=\frac{m}{n}$代入，得

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\frac{n!}{(n-\nu)!}+(-1)^{n+1}(n-1)!m=$$
$$\int_0^1 e^{-t}(1-t)^n dt.$$

此式左端显然是一个整数，但右端却适合不等式

$$0<\int_0^1 e^{-t}(1-t)^n dt<1.$$

这是不可能的事.

73. （达布公式）设 $P(t)$ 是一个最高项系数为 1 的 n 次多项式. 设 $f^{(n)}(x)$在包含 x_0 的区间上绝对连续. 则在同一区间上有

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{n!}\left[P^{(n-\nu)}(t)f^{(\nu)}(t)\right]_{t=x_0}^{t=x}$$
$$+\frac{(-1)^n}{n!}\int_{x_0}^{x}P(t)f^{(n+1)}(t)dt.$$

（达布，G. Darboux，1842—1917. ）

［提示］ 对积分项多次运用分部积分法，并注意到 $P^{(n)}(t)=n!$即得.

［注意］ 本题的公式证明虽然简单，但在应用上却非常灵活. 它有着种种特殊的表现形式. 例如，如果把 $f(x)-f(x_0)$看作其导函数 $\varphi(t)$的定积分，即有

$$\int_a^b \varphi(t)dt=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{n!}\left[P^{(n-\nu)}(x)\varphi^{(\nu-1)}(x)\right]_{x=a}^{x=b}$$

$$+\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b P(x)\varphi^{(n)}(x)dx.$$

这是皮特(K. Petr)的公式. 又如果取 $P(t)=(t-x)^n$, 即得命题71中带封闭余项表示的泰勒公式. 而下面的命题74, 亦是其特例.

74. 设 $f^{(m+n)}(x)$ 在包含 x_0 的区间上绝对连续. 则在同一区间上有

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\frac{\binom{n}{\nu}}{\binom{m+n}{\nu}}\frac{(x-x_0)^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(x)=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{m+n}{\nu}}$$

$$\frac{(x-x_0)^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(x_0)$$

$$+\frac{1}{(m+n)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^m(x_0-t)^n f^{(m+n+1)}(t)dt.$$

(Obreschkoff)

[提示] 于达布公式中以 $m+n$ 代替 n, 并令

$$P(t)=(t-x)^m(t-x_0)^n.$$

则

$$P^{(m+n-\nu)}(x)=\begin{cases}\binom{m+n-\nu}{m}m!\ \dfrac{n!}{\nu!}(x-x_0)^{\nu} & (\nu=0,1,\cdots,n),\\ 0 & (\nu=n+1,\cdots,n+m),\end{cases}$$

$$P^{(m+n-\nu)}(x_0)=\begin{cases}\binom{m+n-\nu}{n}\dfrac{m!}{\nu!}n!(x_0-x)^{\nu} & (\nu=0,1,\cdots m),\\ 0 & (\nu=m+1,\cdots,m+n).\end{cases}$$

且

$$\binom{m+n-\nu}{m}\frac{m!n!}{(m+n)!}=\binom{n}{\nu}\Big/\binom{m+n}{\nu},$$

$$\binom{m+n-\nu}{n}\frac{m!n!}{(m+n)!}=\binom{m}{\nu}\Big/\binom{m+n}{\nu}.$$

于是由命题 73 即得本题的结论.

75. 设m和n都是非负整数,$m+n>0$. 写

$$p_m(x)=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{m+n}{\nu}}\cdot\frac{x^0}{\nu!},\quad q_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{\binom{n}{\nu}}{\binom{m+n}{\nu}}\cdot\frac{x^\nu}{\nu!}.$$

则

$$e^x q_n(x)-p_m(x)=\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!}\int_0^x t^n(t-x)^m e^t\,dt,$$

且

$$e^x=\frac{p_m(x)}{q_n(x)}+O(x^{m+n+1})\quad(x\to 0).$$

[提示] 第一个等式是奥勃列希柯夫(N. Obreschkoff)公式于$f(x)=e^x$、$x_0=0$时的直接推论. 第二个等式亦甚显然, 因为$e^x q_n(x)-p_m(x)=O(x^{m+n+1})$而$q_n(x)=1+O(x)$.

本命题给出了e^x在$x=0$的帕兑(H. Padé)逼近.

76. 设$a\neq 0$是一个有理数. 试证e^a是无理数.

[证] 显然, 只要对a为正整数的情形证明就足够了. 于命题 75 置$x=a$, $m=n$, 并令$P=\frac{(2n)!}{n!}p_n(a)$, $Q=\frac{(2n)!}{n!}q_n(a)$. 则显然P和Q都是正整数,且

$$Pe^a-Q=\frac{1}{n!}\int_0^a t^n(t-a)^n e^t\,dt.$$

现设a为正整数而e^a为有理数,令$e^a=\frac{A}{B}$, $Pe^a-Q=R$, 这里A和

B 为整数．则

$$P\frac{A}{B}-Q=R,\quad PA-QB=BR.$$

所以 BR 是整数．但由第三章命题 153,

$$0<|BR|<\frac{n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}e^{a}=o(1)\quad(n\to\infty).$$

这个矛盾推翻了 e^a 为有理数的假定.

77. 试证 e 是超越数，即 e 不是任何整系数代数方程之根.

(Hermite)

【证】 于达布公式置 $f(x)=e^{-x}$, $x_0=0$, 得

$$e^{-x}-1=-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{n!}[P^{(n-\nu)}(x)e^{-x}-P^{(n-\nu)}(0)]$$
$$-\frac{1}{n!}\int_0^x P(t)e^{-t}dt.$$

即

$$\sum_{\nu=0}^{n}P^{(\nu)}(0)=e^{-x}\sum_{\nu=0}^{n}P^{(\nu)}(x)+\int_0^x P(t)e^{-t}dt.$$

写 $S(x)=\sum_{\nu=0}^{n}P^{(\nu)}(x)$．则

$$S(0)e^{x}=S(x)+e^{x}\int_0^x P(t)e^{-t}dt.$$

注意这个式子对任意的 n 次多项式 $P(t)$ 都成立．现设 e 不是超越数，而是代数数，即 e 满足整系数的代数方程

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_mx^m=0\quad(c_0\neq0).$$

则有

$$0=\sum_{\mu=0}^{m}c_\mu S(0)e^{\mu}=\sum_{\mu=0}^{m}c_\mu S(\mu)+\sum_{\mu=0}^{m}c_\mu e^{\mu}\int_0^{\mu}P(t)e^{-t}dt$$
$$=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

取

$$P(t)=\frac{1}{(p-1)!}t^{p-1}(t-1)^p(t-2)^p\cdots(t-m)^p,$$

其中 p 为大于 m 和 $|c_0|$ 的质数. 显然, $P(t)$ 可表成

$$P(t)=\frac{[(-1)^m m!]^p}{(p-1)!}t^{p-1}+p\sum_{\nu=p}^{n}\frac{a_{\nu,0}}{p!}t^{\nu},$$

又对所有 $\mu=1,2,\cdots,m$ 还可表成

$$P(t)=p\sum_{\nu=p}^{n}\frac{a_{\nu,\mu}}{p!}(t-\mu)^{\nu},$$

这里系数 $a_{\nu,\mu}(\nu=p,\cdots,n;\mu=0,1,\cdots,m)$ 都是整数. 由是易见

$$\sum\nolimits_1=\sum_{\mu=0}^{m}c_{\mu}S(\mu)=c_0[(-1)^m m!]^p+p\sum_{\mu=0}^{m}c_{\mu}\sum_{\nu=p}^{n}a_{\nu,\mu}\frac{\nu!}{p!}.$$

此式右端各项皆为整数, 其中第一项不是 p 的倍数, 而其余各项则都是 p 的倍数. 所以 Σ_1 是一个不为零的整数. 至于 Σ_2, 由于

$$|P(t)|<\frac{1}{(p-1)!}m^{p-1}m^p\cdots m^p=\frac{m^{p-1+mp}}{(p-1)!}\quad(0\leqslant t\leqslant m),$$

$$\left|\int_0^{\mu}P(t)e^{-t}dt\right|\leqslant\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\int_0^{\mu}e^{-t}dt<\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!},$$

所以

$$|\Sigma_2|<(|c_0|+|c_1|+\cdots+|c_m|)e^m\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}=o(1)$$
$$(p\to\infty).$$

因此当 p 充分大时 $\Sigma_1+\Sigma_2$ 不可能为零. 这个矛盾证明了 e 不是代数数, 而是超越数.

78. 设 $\alpha\neq m,m-1,\cdots,1,0,-1,\cdots,-n$,

$$p_m(x)=\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m-\alpha}{m-\nu}\binom{n+\alpha}{\nu}x^{\nu},$$

$$q_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m-\alpha}{\nu}\binom{n+\alpha}{n-\nu}x^{\nu}.$$

试证

$$x^{\alpha}q_n(x)-p_m(x)$$
$$=\binom{m-\alpha}{m}\binom{n+\alpha}{n}\alpha\int_1^x(t-x)^m(1-t)^n t^{\alpha-m-1}dt,$$

且

$$x^{\alpha}=\frac{p_m(x)}{q_n(x)}+O((x-1)^{m+n+1})\quad(x\to1).$$

[证] 写

$$r(x)=x^{\alpha}q_n(x)-p_m(x)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m-\alpha}{\nu}\binom{n+\alpha}{n-\nu}x^{\nu+\alpha}-\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m-\alpha}{m-\nu}\binom{n+\alpha}{\nu}x^{\nu}.$$

则当 $k=0,1,\cdots,m$ 时

$$\frac{1}{k!}r^{(k)}(x)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m-\alpha}{\nu}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\binom{\nu+\alpha}{k}x^{\nu+\alpha-k}$$
$$-\sum_{\nu=k}^{m}\binom{m-\alpha}{m-\nu}\binom{n+\alpha}{\nu}\binom{\nu}{k}x^{\nu-k}.$$

利用第二章中的范德蒙公式(命题 35)可得

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m-\alpha}{\nu}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\binom{\nu+\alpha}{k}$$
$$=\binom{n+\alpha}{k}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m-\alpha}{\nu}\binom{n-k+\alpha}{n-\nu}=\binom{n+\alpha}{k}\binom{m+n-k}{n},$$

$$\sum_{\nu=k}^{n}\binom{m-\alpha}{m-\nu}\binom{n+\alpha}{\nu}\binom{\nu}{k}$$
$$=\binom{n+\alpha}{k}\sum_{\nu=0}^{m-k}\binom{m-\alpha}{m-k-\nu}\binom{n-k+\alpha}{\nu}$$
$$=\binom{n+\alpha}{k}\binom{m+n-k}{m-k}=\binom{n+\alpha}{k}\binom{m+n-k}{n}.$$

所以

$$\frac{1}{k!}r^{(k)}(1)=0\quad(k=0,1,\cdots,m).$$

继续求导得

$$\frac{1}{(m+1)!}r^{(m+1)}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m-\alpha}{\nu}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\binom{\nu+\alpha}{m+1}x^{\nu+\alpha-m-1}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m-\alpha}{m}\binom{n+\alpha}{n}\frac{\alpha}{m+1}(-1)^{\nu-m}\binom{n}{\nu}x^{\nu+\alpha-m-1}$$

$$=(-1)^{m}\binom{m-\alpha}{m}\binom{n+\alpha}{n}\frac{\alpha}{m+1}x^{\alpha-m-1}(1-x)^{n}.$$

所以由泰勒公式(命题 71)得

$$r(x)=\binom{m-\alpha}{m}\binom{n+\alpha}{n}\alpha\int_{1}^{x}(t-x)^{m}(1-t)^{n}t^{\alpha-m-1}dt.$$

79. 设$f^{(2k-1)}(x)$在$[a,\infty)$上为有界变差函数，且满足

$$\lim_{x\to\infty}f^{(2\nu-1)}(x)=0\quad(\nu=1,\cdots,k).$$

则当$\sum_{n=0}^{\infty}f(a+nh)$和$\int_{a}^{\infty}f(x)dx$ 皆收敛时，必存在 θ, $|\theta|\leqslant1$, 使

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(a+nh)=\frac{1}{h}\int_{a}^{\infty}f(x)dx+\frac{1}{2}f(a)$$

$$-\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}f^{(2\nu-1)}(a)h^{2\nu-1}$$

$$-\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)\{f^{(2k-1}(a)\ +\theta\bigvee_{a}^{\infty}(f^{(2k-1)})h^{2k-1}\}.$$

［证］ 于第二章命题 108 令 $n\to\infty$ 即得.

80. 试证第三章命题 7 中的曼丢不等式可以进一步精确化成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^{2}+c^{2})^{2}}=\frac{1}{c^{2}}\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^{\mu}\frac{B_{2\mu}}{c^{2\mu}}+O\left(\frac{1}{c^{2k+2}}\right)\quad(c\to\infty).$$

［证］ 可应用命题 79，因此关键在于计算函数

$$f(x)=\frac{2x}{(x^2+c^2)^2}$$

的各阶导数．为此，命

$$F(x)=\int_x^\infty f(t)\,dt=\frac{1}{x^2+c^2}.$$

我们有

$$(x^2+c^2)F(x)=0.$$

对此应用莱布尼茨微分法则，得

$$(x^2+c^2)F^{(\nu+2)}(x)+2(\nu+2)xF^{(\nu+1)}(x)+(\nu+2)(\nu+1)F^{(\nu)}(x)=0 \quad (\nu=0,1,\cdots).$$

写 $F^{(\nu)}(x)=(-1)^\nu \nu!\,q_\nu$．则 q_ν 满足

$$\begin{cases}(x^2+c^2)q_{\nu+2}-2xq_{\nu+1}+q_\nu=0 \quad (\nu=0,1,\cdots),\\ q_0=F(x)=\dfrac{1}{x^2+c^2},\\ q_1=f(x)=\dfrac{2x}{(x^2+c^2)^2}.\end{cases}$$

解此二阶常系数差分方程得

$$q_\nu=\frac{\sin(\nu+1)\varphi}{c(x^2+c^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad (\nu=0,1,\cdots),$$

这里

$$\varphi=\arcsin\frac{c}{\sqrt{x^2+c^2}}.$$

从而求得

$$\frac{f^{(\nu-1)}(x)}{\nu!}=(-1)^{\nu-1}\frac{\sin(\nu+1)\varphi}{c(x^2+c^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \quad (\nu=1,2,\cdots).$$

以此代入命题 79，即得所要证的渐近展开式．

[注意] 实际上，我们可对渐近展开式中的大O项做出更确切的估计:

$$(-1)^k\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}\left\{1+\frac{2k+1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\right\}\frac{B_{2k}}{c^{2k+2}}<O\left(\frac{1}{c^{2k+2}}\right)$$

$$<(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}\left\{\frac{2k+1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}-1\right\}\frac{B_{2k}}{c^{2k+2}}.$$

81. (扩充的欧拉-马克劳林公式)设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，并且 $f^{(r-1)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为有界变差函数，这里 $r\geqslant 1$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 中的整数 k 处的值之和可表成

$$\sum_{a\leqslant k<b} f(k)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{1}{\nu!}\{\bar{B}_\nu(-b)f^{(\nu-1)}(b)$$

$$-\bar{B}_\nu(-a)f^{(\nu-1)}(a)\}-\frac{1}{r!}\int_a^b\bar{B}_r(-x)df^{(r-1)}(x).$$

[证]首先我们留意

$$\int_a^b f(x)d[-x]=-\sum_{a\leqslant k<b}f(k) \tag{*}$$

现在命

$$R_r=\frac{1}{r!}\int_a^b\bar{B}_r(-x)df^{(r-1)}(x).$$

显然

$$R_r=\frac{1}{r!}\bar{B}_r(-x)f^{(r-1)}(x)\Big|_a^b-\frac{1}{r!}\int_a^b f^{(r-1)}(x)d\bar{B}_r(-x).$$

若 $r\geqslant 2$, 则

$$-\frac{1}{r!}\int_a^b f^{(r-1)}(x)d\bar{B}_r(-x)$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b f^{(r-1)}(x)\bar{B}_{r-1}(-x)dx=R_{r-1}.$$

若 $r=1$, 则由 $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$ 及(*),

$$-\frac{1}{r!}\int_a^b f^{(r-1)}(x)d\overline{B}_r(-x)$$

$$=-\int_a^b f(x)d\left(-x-[-x]-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int_a^b f(x)dx-\sum_{a\leqslant k<b} f(k).$$

总之，我们有

$$R_r=\frac{1}{r!}\{\overline{B}_r(-b)f^{(r-1)}(b)-\overline{B}_r(-a)f^{(r-1)}(a)\}$$

$$+\begin{cases}R_{r-1} & (r\geqslant 2),\\ \int_a^b f(x)dx-\sum\limits_{a\leqslant k<b} f(k) & (r=1).\end{cases}$$

由是，命题据完全归纳法原理得证.

82. (振荡积分渐近展开公式)设 $f(x, y)$ 是单位正方形区域 $E(0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1)$ 上的二元连续函数，对固定的 $0\leqslant y\leqslant 1$，$f^{(r-1,0)}(x,y)$ 是 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的有界变差函数. 则对任何正数 λ，有

$$\int_0^1 f(x, \{\lambda x\})dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{1}{\nu!\lambda^\nu}\int_0^1\{\overline{B}_\nu(y-\lambda)f^{(\nu-1,0)}(1,y)$$

$$-B_\nu(y)f^{(\nu-1,0)}(0,y)\}dy$$

$$-\frac{1}{r!\lambda^r}\int_0^1 dy\int_0^1 \overline{B}_r(y-\lambda x)df^{(r-1,0)}(x,y),$$

这里 $\{\lambda x\}$ 表 λx 的小数部分.

[证] 作替换 $y=\lambda x$，得

$$\int_0^1 f(x, \{\lambda x\})dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f\left(\frac{y}{\lambda}, \{y\}\right)dy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\lambda}\sum_{-y\leqslant k<\lambda-y} f\left(\frac{k+y}{\lambda}, y\right)dy.$$

由命题 81，上式末端的被积函数等于

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{-y\leqslant k<\lambda-y} f\left(\frac{k+y}{\lambda}, y\right)=\frac{1}{\lambda}\int_{-y}^{\lambda-y} f\left(\frac{x+y}{\lambda}, y\right)dy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{1}{\nu!\lambda^{-\nu}}\{\bar{B}_{\nu}(y-\lambda)f^{(\nu-1,0)}(1,y)-B_{\nu}(y)f^{(\nu-1,0)}(0,y)\}$$

$$-\frac{1}{r!\lambda^{r}}\int_{-y}^{\lambda-y}\bar{B}_{r}(-x)df^{(r-1,0)}\left(\frac{x+y}{\lambda}, y\right)$$

$$=\int_0^1 f(x,y)dy+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{1}{\nu!\lambda^{\nu}}\{\bar{B}_{\nu}(y-\lambda)f^{(\nu-1,0)}(1,y)$$

$$-B_{\nu}(y)f^{(\nu-1,0)}(0,y)\}-\frac{1}{r!\lambda^{\nu}}\int_0^1\bar{B}_{r}(y-\lambda x)df^{(r-1,0)}(x,y).$$

所以命题得证.

83. 设 $f^{(r,0)}(x,y)$在 $E(0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1)$ 上连续 ($\nu=0,1,\cdots,r$). 则

$$\int_0^1 f(x,\{\lambda x\})dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{1}{\nu!\lambda^{\nu}}\int_0^1\{\bar{B}_{\nu}(y-\lambda)f^{(\nu-1,0)}(1,y)$$

$$-\bar{B}_{\nu}(y)f^{(\nu-1,0)}(0,y)\}dy+O(\lambda^{-r}),$$

这里

$$|O(\lambda^{-r})|\leqslant\lambda^{-r}\left(\sqrt{2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}}{(2r)!}+2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r+1}(\{-\lambda\})}{(2r+1)!\lambda}}\right.$$

$$\cdot\sqrt{\int_0^1\int_0^1|f^{(r,0)}(x,y)|^2dxdy}+\sqrt{2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}-B_{2r}(\{-\lambda\})}{(2r)!}}$$

$$\left.\cdot\sqrt{\int_0^1|f^{(r-1,0)}(1,y)|^2dy}\right),$$

$\{-\lambda\}$是 $-\lambda$ 的小数部分. 特别若 λ 为整数, 则

$$|O(\lambda^{-r})|\leqslant\lambda^{-r}\sqrt{2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\int_0^1\int_0^1|f^{(r,0)}(x,y)|^2dxdy}.$$

[证] 把题中的渐近式写成

$$I(\lambda)=S_{r-1}(\lambda)+O(\lambda^{-r}).$$

则由命题 82,

$$I(\lambda)-S_{r-1}(\lambda)=-\frac{1}{r!\lambda^r}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)[\bar{B}_r(y-\lambda x)$$

$$-B_r(y)]dxdy+\frac{1}{r!\lambda^r}\int_0^1 f^{(r-1,0)}(1,y)[\bar{B}_r(y-\lambda)$$

$$-B_r(y)]dy.$$

对上式右端的两项分别应用柯西不等式,经过如下的计算即得:

$$\frac{1}{(r!)^2}\int_0^1\int_0^1[\bar{B}_r(y-\lambda x)-B_r(y)]^2dxdy$$

$$=\frac{1}{(r!)^2}\int_0^1\int_0^1[\bar{B}_r(y-\lambda x)^2-2\bar{B}_r(y-\lambda x)B_r(y)+B_r(y)^2]dxdy$$

$$=\frac{2}{(r!)^2}\int_0^1 dx\int_0^1[B_r(y)-\bar{B}_r(y-\lambda x)]B_r(y)dy$$

$$=2\int_0^1\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\frac{B_{r+\nu-1}(y)-\bar{B}_{r+\nu-1}(y-\lambda x)}{(r+\nu-1)!}\cdot\frac{B_{r-\nu}(y)}{(r-\nu)!}\Bigg|_{y=0}^{y=1}dx$$

$$=2(-1)^{r-1}\int_0^1\frac{B_{2r}-\bar{B}_{2r}(-\lambda x)}{(2r)!}dx$$

$$=2(-1)^{r-1}\left[\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{\bar{B}_{2r+1}(-\lambda)}{(2r+1)!\lambda}\right];$$

类似地

$$\frac{1}{(r!)^2}\int_0^1[\bar{B}_r(y-\lambda)-B_r(y)]^2dy$$

$$=\frac{2}{(r!)^2}\int_0^1[B_r(y)-B_r(y-\lambda)]B_r(y)dy$$

$$=2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}-\bar{B}_{2r}(-\lambda)}{(2r)!}.$$

84. 试证渐近等式

$$\int_0^1\cos(2\pi x)\sin(2\pi\lambda x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{2k-1}\int_0^1 \sin(2\pi x)B_{2k-1}(x)dx$$

$$+O\left(\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{2m+1}\right) \quad (\lambda\to\infty).$$

85. 在命题 81 的假设下，求 $\sum_{a<k\leqslant b} f(k)$之积分表示.

［解］ 显然

$$\sum_{a<k\leqslant b} f(k)=\sum_{-b\leqslant k<-a} f(-k).$$

对右端的和应用命题 81，得

$$\sum_{a<k\leqslant b} f(k)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\{\bar{B}_\nu(b)f^{(\nu-1)}(b)$$

$$-\bar{B}_\nu(a)f^{(\nu-1)}(a)\}+\frac{(-1)^{r-1}}{r!}\int_a^b \bar{B}_r(x)df^{(r-1)}(x).$$

86. (圆内格点问题)设以 $R(x)$表示圆 $u^2+v^2\leqslant x$ 内格点(u,v)之数目．试证

$$R(x)=\pi x+O(\sqrt{x}) \quad (x\to\infty).$$

［证］下边图形中的格点数(虚线上的格点不计在内)可用

$$\Sigma=\sum_{0<u\leqslant\sqrt{\frac{x}{2}}}[\sqrt{x-u^2}]=\sum_{0<u\leqslant\sqrt{\frac{x}{2}}}\sqrt{x-u^2}$$

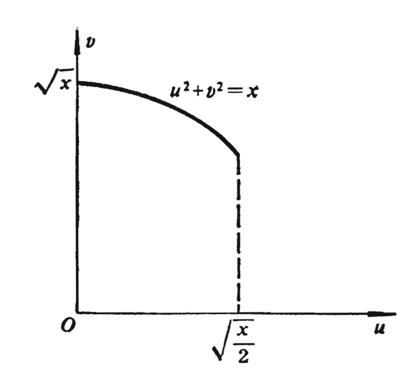
$$-\sum_{0<u\leqslant\sqrt{\frac{x}{2}}}\{\sqrt{x-u^2}\}=\Sigma_1-\Sigma_2$$

表示，这里$[\sqrt{x-u^2}]$和$\{\sqrt{x-u^2}\}$分别表$\sqrt{x-u^2}$ 的整数和小数部分．所以

$$R(x)=8\Sigma+4[\sqrt{x}]-4\left[\sqrt{\frac{x}{2}}\right]^2+1$$

$$=8\Sigma_1-2x+O(\sqrt{x}).$$

对和式 Σ_1 应用命题 85，得



$$\Sigma_1=\sum_{0<u\leqslant\sqrt{\frac{x}{2}}}\sqrt{x-u^2}=\int_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}\sqrt{x-u^2}\,du$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\left\{\sqrt{\frac{x}{2}}\right\}\right)\sqrt{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\bar{B}_2\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$$

$$+\frac{x}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}}\bar{B}_2(u)\frac{du}{(x-u^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\pi}{8}x+\frac{x}{4}+\left(\frac{1}{2}-\left\{\sqrt{\frac{x}{2}}\right\}\right)\sqrt{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{x}+O(1).$$

由是代入上式即得.

［注意］ 在本题的证明中,对 Σ_1 的估计已精密得超过了问题的需要. 但是这种不平衡表明，我们只要能设法改进 Σ_2 的估计,便能对 $R(x)$的估计作进一步的改进. 例如,如能估计出

$$\Sigma_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{2}}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\ln x\right),$$

便有

$$R(x)=\pi x+O(x^{\frac{1}{3}}\ln x)\quad(x\to\infty).$$

这个结果便是色品斯基(W. Sierpinski)的定理.

§5. 插值余项阶的估计

插值多项式未必收敛. 事实上插值过程是一个渐近展开的过程. 本节将研究这样的问题: 怎样根据被插函数的光滑性来计算插值余项的阶. 在这里, 差商的运算技巧起着关键的作用. 我们首先将通过若干命题和习题十分经济地引出关于差商的一些重要关系式.

函数 $f(x)$ 在节点 x_0 和 x_1 上的(一阶)差商, 当 $x_0 \neq x_1$ 时定义为

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

差商是一个算子. 在形式上, 不妨倒过来看, $f[x_0, x_1]$就是算子$[x_0, x_1]$作用在 f 上. 如有必要指出是把 f 看作哪个变元的函数而作用的话, 可把该变元写在方括号[…]的左下角处. 如

$$f(u, v)_v[x_0, x_1] = \frac{f(u, x_1) - f(u, x_0)}{x_1 - x_0}.$$

对于三个不同的节点 x_0, x_1, x_2, 定义二阶差商

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x]_x[x_1, x_2] = f[x_0, x_1]_{x_1}[x_1, x_2].$$

一般地, 对于 $k+1$ 个都不相同的节点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$, k 阶差商定义为

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \cdots, x_k] &= f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]_{x_{k-1}}[x_{k-1}, x_k] \\ &= f[x_0, x_1]_{x_1}[x_1, x_2]_{x_2}\cdots_{x_{k-1}}[x_{k-1}, x_k]. \end{aligned}$$

我们还把 $f(x) = f[x]$ 看作是零阶差商.

重节点的差商当作节点全不同的差商的极限:

$$f[\underbrace{x, \cdots, x}_{k+1\text{个}}] = f[x^{k+1}] = \lim f[x_0, \cdots, x_k],$$

这里假定 $x_0, \cdots, x_k$ 互不相等, 且都趋向于 x. 一般地, 则命

$$f[x^{i+1}, y^{j+1}, \cdots, z^{k+1}]$$

$$=\lim f[x_0, \cdots, x_i, y_0, \cdots, y_j, \cdots, z_0, \cdots, z_k],$$

这里 $x_\mu \to x(\mu=0, \cdots, i)$, $y_\nu \to y(\nu=0, \cdots, j)$, $\cdots$, $z_\lambda \to z$ $(\lambda=0, \cdots, k)$，且各不相等.

上述定义中的节点，不必限定为实数，当 f 为复变函数时，节点可以是复数. 但是我们下面只针对实数的情形来讨论，读者自己不难识别，哪些命题对复数也是成立的. 我们还以 $\langle x_0, \cdots, x_k\rangle$ 表示 $x_0, \cdots, x_k$ 的凸闭包，特别当 $x_0, \cdots, x_k$ 为实数时，$\langle x_0, \cdots, x_k\rangle$ 即表示区间 $[\min\limits_i x_i, \max\limits_i x_i]$.

87. 试证差分和差商之间有如下的关系：

$$f[x, x+1, \cdots, x+k]=\frac{\Delta^k f(x)}{k!}.$$

88. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 各不相同. 试证差商具有对称表示

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{f(x_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{k}(x_\nu-x_\mu)}.$$

［提示］ 用数学归纳法来证.

89. 设 $g(x)=\dfrac{1}{x}$，则对全不相同的节点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$,

$$g[x_0, x_1, \cdots, x_k]=\frac{(-1)^k}{x_0x_1\cdots x_k}.$$

［证］ 由命题 88,

$$g[x_0, x_1, \cdots, x_k]=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{x_\nu\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{k}(x_\nu-x_\mu)}$$

$$=\frac{(-1)^k}{x_0x_1\cdots x_k}\sum_{\nu=0}^{k}\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{k}\frac{x_\mu}{x_\mu-x_\nu}=\frac{(-1)^k}{x_0x_1\cdots x_k}h(0),$$

其中

$$h(x)=\sum_{\nu=0}^{k}\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{k}\frac{x_\mu-x}{x_\mu-x_\nu}$$

是k次多项式，且满足$h(x_\nu)=1(\nu=0,1,\cdots,k)$．所以$h(x)=1$．由是命题得证．

90. 设$x_0,x_1,\cdots,x_{j+k}$各不相同．试证差商算子满足结合律：

$$f[x_0,\cdots,x_j,\cdots,x_{j+k}]=f[x_0,\cdots,x_j]_{x_j}[x_j,\cdots,x_{j+k}].$$

［证］由命题88，

$$f[x_0,\cdots,x_j]=\varphi(x_j)+\psi(x_j),$$

其中

$$\varphi(x)=-\sum_{\nu=0}^{j-1}\frac{f(x_\nu)}{(x-x_\nu)\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{j-1}(x_\nu-x_\mu)},$$

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{\prod\limits_{\mu=0}^{j-1}(x-x_\mu)}.$$

再由命题89和88求φ和ψ的差商，我们有(仍旧记$g(x)=\dfrac{1}{x}$)

$$\varphi[x_j,\cdots,x_{j+k}]=-\sum_{\nu=0}^{j-1}\frac{f(x_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{j-1}(x_\nu-x_\mu)}g[x_j-x_\nu,\cdots,x_{j+k}-x_\nu]$$

$$=-\sum_{\nu=0}^{j-1}\frac{(-1)^k f(x_\nu)}{\prod\limits_{\mu=j}^{j+k}(x_\mu-x_\nu)\cdot\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{j-1}(x_\nu-x_\mu)}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{j-1}\frac{f(x_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{j+k}(x_\nu-x_\mu)}.$$

$$\psi[x_j,\cdots,x_{j+k}]=\sum_{\nu=j}^{j+k}\frac{f(x_\nu)}{\prod\limits_{\mu=0}^{j-1}(x_\nu-x_\mu)\cdot\prod\limits_{\substack{\mu=j\\ \mu\neq\nu}}^{j+k}(x_\nu-x_\mu)}$$

$$=\sum_{\nu=j}^{j+k}\frac{f(x_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{j+k}(x_\nu-x_\mu)}.$$

所以

$$f[x_0,\cdots,x_j]_{x_j}[x_j,\cdots,x_{j+k}]=\varphi[x_j,\cdots,x_{j+k}]+\psi[x_j,\cdots,x_{j+k}]$$

$$=\sum_{\nu=0}^{j-1}\frac{f(x_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{j+k}(x_\nu-x_\mu)}+\sum_{\nu=j}^{j+k}\frac{f(x_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{j+k}(x_\nu-x_\mu)}$$

$$=f[x_0,\cdots,x_{j+k}].$$

91. 设 $x_0,\cdots,x_i,y_0,\cdots,y_j,\cdots,z_0,\cdots,z_k$ 各不相同. 则

$$f[x_0,\cdots,x_i,y_0,\cdots,y_j,\cdots,z_0,\cdots,z_k]$$
$$=f[x_0,y_0,\cdots,z_0]_{x_0}[x_0,\cdots,x_i]_{y_0}[y_0,\cdots,y_j]\cdots_{z_0}[z_0,\cdots,z_k].$$

[证] 由命题 88 可知差商关于节点是对称的, 所以

$$f[x_0,\cdots,x_i,y_0,\cdots,y_j,\cdots,z_0,\cdots,z_k]$$
$$=f[x_0,\cdots,z_0,x_1,\cdots,x_i,\cdots,z_1,\cdots,z_k].$$

再由命题 90 即差商算子的结合律即得.

92. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 各不相同. 若 $f^{(k)}(x)$在$\langle x_0,\cdots,x_k\rangle$上连续, 则

$$f[x_0,\cdots,x_k]=\int_0^1 dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{k-1}}f((1-t_1)x_0$$
$$+(t_1-t_2)x_1+\cdots+(t_{k-1}-t_k)x_{k-1}+t_kx_k)\,dt_k.$$

(Genocchi)

93. 设 $x_0,\cdots,x_k$ 各不相同. 若 $f^{(k)}(x)$在$\langle x_0,\cdots,x_k\rangle$上连续, 则

$$f[x_0,\cdots,x_k]=\int_0^1\cdots\int_0^1 t_1^{k-1}t_2^{k-2}\cdots t_{k-1}f^{(k)}(t)\,dt_1\cdots dt_k,$$

式中

$$t=x_0+(x_1-x_0)t_1+(x_2-x_1)t_1t_2+\cdots+(x_k-x_{k-1})t_1\cdots t_k$$

$$(0\leqslant t_1\leqslant 1,\cdots,0\leqslant t_k\leqslant 1).\quad \text{(Genocchi)}$$

94. 试将命题 92 和 93 的结果推广到含重节点的情形.

95. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 各不相同. 若 $f^{(k_\nu)}(x)$在 $x=x_\nu$ 的近旁连续$(\nu=0,1,\cdots,n)$. 则

$$f[x_0^{k_0+1}, x_1^{k_1+1}, \cdots, x_n^{k_n+1}]$$
$$=\frac{1}{k_0!k_1!\cdots k_n!}D_{x_0}^{k_0}D_{x_1}^{k_1}\cdots D_{x_n}^{k_n}f[x_0, x_1, \cdots, x_n],$$

这里$D_{x_\nu}=\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$.

[证] 由命题 92 或 93 取极限即得

$$f[x^{k+1}]=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x).$$

这是 $n=0$的情形, 一般地, 由命题 91 取极限得

$$f[x_0^{k_0+1}, x_1^{k_1+1}, \cdots, x_n^{k_n+1}]$$
$$=f[x_0, x_1, \cdots, x_n]_{x_0}[x_0^{k_0+1}]_{x_1}[x_1^{k_1+1}]\cdots{}_{x_n}[x_n^{k_n+1}].$$

由是把已证得的公式分别应用到 $x_0, \cdots, x_n$ 上去即得.

96. 试利用命题 95 证明, 在相同的假设下有

$$f[x_0^{k_0+1}, x_1^{k_1+1}, \cdots, x_n^{k_n+1}]$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{k_\nu!}\sum_{j=0}^{k_\nu}\binom{k_\nu}{j}f^{(j)}(x_\nu)D_{x_\nu}^{k_\nu-j}\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n}(x_\nu-x_\mu)^{-k_\mu-1}.$$

[证] 把命题 88 的表示式代入命题91之等式的右端, 我们有

$$f[x_0^{k_0+1}, x_1^{k_1+1}, \cdots, x_n^{k_n+1}]$$
$$=\frac{1}{k_0!k_1!\cdots k_n!}\sum_{\nu=0}^{n}D_{x_\nu}^{k_\nu}\Big\{f(x_\nu)\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n}D_{x_\mu}^{k_\mu}(x_\nu-x_\mu)^{-1}\Big\}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{k_\nu!}D_{x_\nu}^{k_\nu}\Big\{f(x_\nu)\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n}(x_\nu-x_\mu)^{-k_\mu-1}\Big\}.$$

然后，对 $D^{k}_{x_\nu}\{\cdots\}$ 应用莱布尼茨求导法则即可.

97. 试证，若 $x\neq y$，且 $f^{(k)}(x)$ 与 $f^{(k)}(y)$ 皆存在，则

$$f[x^{k+1},\ y^{k+1}]$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{2k-j}{k-j}\frac{(-1)^{k-j}f^{(j)}(y)+(-1)^{k+1}f^{(j)}(x)}{j!\,(y-x)^{2k+1-j}}.$$

98. 试证，若 $x\neq y$，且 $f^{(k)}(x)$ 存在，则

$$f[x^{k+1},y]=(y-x)^{-k-1}\left(f(y)-\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(y-x)^{\nu}}{\nu!}f^{(\nu)}(x)\right).$$

99. 试证任意节点差商的递推计算法则：

$$f[x_0,\cdots,x_{k+1}]=\begin{cases}f[x_0,\cdots,x_k]_{x_0}[x_0,x_{k+1}] & (x_0\neq x_{k+1}),\\ \dfrac{1}{m}D_{x_0}f[x_0,\cdots,x_k] & (x_0=x_{k+1}),\end{cases}$$

这里 m 是 $x_0,\cdots,x_k$ 中与 x_0 相等的节点个数.

［注意］ 用这个法则来列差商表是颇为方便的．特别，若令 $x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{k+1}$，则

$$f[x_0,\cdots,x_{k+1}]=\begin{cases}\dfrac{f[x_1,\cdots,x_{k+1}]-f[x_0,\cdots,x_k]}{x_{k+1}-x_0} & (x_{k+1}\neq x_0),\\ \dfrac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0) & (x_{k+1}=x_0).\end{cases}$$

这种列表法省去了对一般差商求导数的麻烦，最值得提倡.

100. 设 $P(x)$ 是一个 n 次多项式，则

$$P[x,x_1,\cdots,x_k]=\begin{cases}n-k\text{ 次多项式} & (k<n),\\ a_0 & (k=n),\\ 0 & (k>n),\end{cases}$$

这里 a_0 是 $P(x)$ 的最高次项系数.

101. 设 $f^{(k)}(x)$ 在 $\langle x_0,\cdots,x_k\rangle$ 上连续，则存在 $\xi\in\langle x_0,\cdots,x_k\rangle$ 使

$$f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi).$$

102. 设

$$\omega_0(x) = 1, \omega_\nu(x) = \prod_{i=0}^{\nu-1} (x - x_i) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n+1).$$

$$H(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=0}^{n} f[x_0, \cdots, x_\nu] \omega_\nu(x),$$

$$R(x) = f(x) - H(x).$$

则对适合 $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$ 的任意正整数 k 和 m, 有

$$R^{(k)}(x) = k! \sum_{\nu=0}^{k} f[x^{\nu+1}, x_0, \cdots, x_{m-\nu}] \frac{\omega_{m-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x - x_{m-\nu})$$

$$- \sum_{\nu=m+1}^{n} f[x_0, \cdots, x_\nu] \omega_\nu^{(k)}(x).$$

[证] 对 m 施行归纳法. 据定义,

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - H^{(k)}(x)$$

$$= k! f[x^{k+1}] - \sum_{\nu=k}^{n} f[x_0, \cdots, x_\nu] \omega_\nu^{(k)}(x)$$

$$= k! \{(f[x^{k+1}] - f[x^k, x_0])$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{k-1} (f[x^{\nu+1}, x_0, \cdots, x_{k-\nu-1}] - f[x^\nu, x_0, \cdots, x_{k-\nu}])$$

$$+ f[x_0, \cdots, x_k]\} - \sum_{\nu=k}^{n} f[x_0, \cdots, x_\nu] \omega_\nu^{(k)}(x).$$

于是由命题 99, 我们得到

$$R^{(k)}(x) = k! \sum_{\nu=0}^{k} f[x^{\nu+1}, x_0, \cdots, x_{k-\nu}](x - x_{k-\nu})$$

$$- \sum_{\nu=k+1}^{n} f[x_0, \cdots, x_\nu] \omega_\nu^{(k)}(x).$$

所以命题对 $m = k$ 成立.

现设命题对适合 $k\leqslant m<n$ 的 m 已成立. 求导

$$\omega_{m+1-\nu}(x)=\omega_{m-\nu}(x)(x-x_{m-\nu})$$

得

$$\omega_{m+1-\nu}^{(k-\nu)}(x)=\omega_{m-\nu}^{(k-\nu)}(x)(x-x_{m-\nu})+(k-\nu)\omega_{m-\nu}^{(k-\nu-1)}(x).$$

即

$$\frac{\omega_{m-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-x_{m-\nu})=\frac{\omega_{m+1-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}-\frac{\omega_{m-\nu}^{(k-\nu-1)}(x)}{(k-\nu-1)!}. \qquad (*)$$

以此代入归纳假设, 即得

$$\begin{aligned}R^{(k)}(x)=k!\sum_{\nu=0}^{k}f[x^{\nu+1},x_0,\cdots,x_{m-\nu}]&\left\{\frac{\omega_{m+1-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}\right.\\
&\left.-\frac{\omega_{m-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu-1)!}\right\}\\
&-\sum_{\nu=m+1}^{n}f[x_0,\cdots,x_\nu]\omega_\nu^{(k)}(x)\\
&=k!\sum_{\nu=0}^{k}\{f[x^{\nu+1},x_0,\cdots,x_{m-\nu}]\\
&-f[x^{\nu},x_0,\cdots,x_{m+1-\nu}]\}\frac{\omega_{m+1-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}\\
&+f[x_0,\cdots,x_{m+1}]\omega_{m+1}^{(k)}(x)\\
&-\sum_{\nu=m+1}^{n}f[x_0,\cdots,x_\nu]\omega_\nu^{(k)}(x)\\
&=k!\sum_{\nu=0}^{k}f[x^{\nu+1},x_0,\cdots,x_{m+1-\nu}]\frac{\omega_{m+1-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}\\
&\sum_{\nu=m+2}^{n}f[x_0,\cdots,x_\nu]\omega_\nu^{(k)}(x).\end{aligned}$$

此即说明命题对 $m+1$ 亦成立. 证毕.

在以上证明过程中, 我们反复运用了命题 99 给出的差商递推算法.

103. 于命题 102 置 $k=0$, 我们得到

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{\nu=0}^{n} f[x_0, \cdots, x_\nu]\prod_{i=0}^{\nu-1}(x-x_i)$$

$$+f[x, x_0, \cdots, x_n]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

试直接推导上述牛顿插值公式.

104. 设 $f^{(n+1)}(t)$在$\langle x, x_0, \cdots, x_n\rangle$上连续. 则对任意$0\leqslant k\leqslant n$, 存在 $\xi_\nu\in\langle x, x_0, \cdots, x_n\rangle(\nu=0, \cdots, k)$, 使

$$\frac{R^{(k)}(x)}{k!}=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{f^{(n+1)}(\xi_\nu)}{(n+1)!}\cdot\frac{\omega_{n-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-x_{n-\nu}).$$

特别, 存在 $\xi\in\langle x, x_0, \cdots, x_n\rangle$使

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

［证］ 于命题 102 置 $k=n$, 得

$$\frac{R^{(k)}(x)}{k!}=\sum_{\nu=0}^{k} f[x^{\nu+1}, x_0, \cdots, x_{n-\nu}]\frac{\omega_{n-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-x_{n-\nu}).$$

再对上式右端的各个差商, 分别应用命题 101 即得.

又当 $k=0$ 时, 因为

$$\omega_n(x)(x-x_n)=\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

所以$R(x)$可表成$(f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

105. 设 $0\leqslant k\leqslant n$. 则

$$\frac{\omega_{n+1}^{(k)}(x)}{k!}=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{\omega_{n-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-x_{n-\nu}).$$

［证］ 利用命题 102 证明中的(*)式即得.

106. 设 $f^{(n+1)}(t)$在$\langle x, x_0, \cdots, x_n\rangle$ 上连续, 且 x 不是$\langle x_0, \cdots,$

$x_n\rangle$的内点. 则对 $0\leqslant k\leqslant n$, 存在 $\xi\in\langle x, x_0, \cdots, x_n\rangle$使

$$R^{(k)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}^{(k)}(x). \qquad \text{(Steffensen)}$$

［证］ 当 x 不是$\langle x_0, \cdots, x_n\rangle$ 的内点时, $\frac{\omega_{n-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-x_{n-\nu})$ 当 $\nu=0, 1, \cdots, k$ 时是同号的. 所以对 $\xi_\nu\in\langle x, x_0, \cdots, x_n\rangle(\nu=0, \cdots, k)$, 存在 $\xi\in\langle x, x_0, \cdots, x_n\rangle$使

$$f^{(n+1)}(\xi)=\frac{\sum_{\nu=0}^{k} f^{(n+1)}(\xi_\nu)\frac{\omega_{n-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-x_{n-\nu})}{\sum_{\nu=0}^{k}\frac{\omega_{n-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-x_{n-\nu})}.$$

由是, 根据命题 104 和 105 即得.

107. 设 $f^{(n+1)}(x)$在$\langle x_0, \cdots, x_n\rangle$上连续, 又设$\langle x_0, \cdots, x_n\rangle$ 的长度为 h. 试证当 $0\leqslant k\leqslant n$ 时对 $x\in\langle x_0, \cdots, x_n\rangle$一致地有

$$R^{(k)}(x)=O(h^{n-k+1}).$$

确切地说,

$$|R^{(k)}(x)|\leqslant\frac{1}{(n-k+1)!}\max_{t\in\langle x_0, \cdots, x_n\rangle}|f^{(n+1)}(t)|h^{n-k+1}$$

$$(x\in\langle x_0, \cdots, x_n\rangle).$$

［证］ 利用命题 104 和 105 来证. 因为

$$\frac{\omega_{n+1}^{(k)}(x)}{k!}=\sum_{0\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\ \prod_{i\neq i_1, \cdots, i_k}(x-x_i),$$

所以

$$\sum_{\nu=0}^{k}\left|\frac{\omega_{n-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-x_{n-\nu})\right|$$

$$\leqslant\sum_{0\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\ \prod_{i\neq i_1, \cdots, i_k}|x-x_i|\leqslant\sum_{0\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\ \prod_{i\neq i_1, \cdots, i_k}h$$

$$=\frac{d^k}{dh^k}h^{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}h^{n+1-k}.$$

因此由命题 104，

$$|R^{(k)}(x)|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\max_{t\in<x_0,\cdots,x_n>}|f^{(n+1)}(t)|\sum_{\nu=0}^{k}\left|\frac{\omega_{n-\nu}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}\right.$$

$$\left.\cdot(x-x_{n-\nu})\right|\leqslant\frac{1}{(n-k+1)!}\max_{t\in<x_0,\cdots,x_n>}|f^{(n+1)}(t)|h^{n+1-k}.$$

108. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数. 我们称

$$\omega(f;t)=\sup_{\substack{|x_2-x_1|\leqslant t\\ x_1,x_2\in[a,b]}}|f(x_2)-f(x_1)|\quad(0\leqslant t\leqslant(b-a))$$

为 f 在$[a,b]$上的连续模. 试证，f 在$[a,b]$上连续的充要条件是

$$\omega(f;t)=o(1)\quad(t\to0+).$$

109. 证明连续模$\omega(t)=\omega(f;t)$适合不等式

$$\omega(nt)\leqslant n\omega(t),$$

这里 n 为正整数. 从而推出

$$\frac{\omega(t_2)}{t_2}\leqslant2\frac{\omega(t_1)}{t_1}\qquad(t_1<t_2).$$

［证］ 设 $x_1,x_2\in[a,b]$，$|x_2-x_1|\leqslant nt$. 记 $\delta=\frac{x_2-x_1}{n}$，则$|\delta|\leqslant t$，所以

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_1+i\delta)-f(x_1+(i-1)\delta)|$$

$$\leqslant n\omega(t).$$

因此 $\omega(nt)\leqslant n\omega(t)$.

再设 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant b-a$，以 n 表小于 $\frac{t_2}{t_1}$的最大整数. 则

$$\omega(t_2)\leqslant\omega((n+1)t_1)\leqslant(n+1)\omega(t_1)$$

$$\leqslant\left(\frac{t_2}{t_1}+1\right)\omega(t_1)\leqslant2\frac{t_2}{t_1}\omega(t_1).$$

所以

$$\frac{\omega(t_2)}{t_2}\leqslant2\frac{\omega(t_1)}{t_1}.$$

110. 试证，连续函数 f 的连续模 $\omega(t)=\omega(f;t)$ 满足下列条件:

$$0=\omega(0)<\omega(t_2)-\omega(t_1)\leqslant\omega(t_2-t_1)\quad(0<t_1<t_2\leqslant b-a).$$

反之，$[0,\ b-a]$上满足这个条件的函数 $\omega(t)$必为某个连续函数(比方它自身)的连续模.

111. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是任意一组节点，$\bar{x}_0\leqslant\bar{x}_1\leqslant\cdots\leqslant\bar{x}_n$ 是其置换,并记

$$h_i=\min_{0\leqslant j,\, j+i\leqslant n}(x_{j+i}-x_j).$$

假定 $0\leqslant m<n$，$f^{(m)}(x)$在$\langle x_0, \cdots, x_n\rangle$上连续，$h_{m+1}>0$. 则对任意 $\nu=m+1, m+2, \cdots, n$,

$$|f[\bar{x}_j, \cdots, \bar{x}_{j+\nu}]|\leqslant\frac{2^{\nu-m}}{m!}h_{m+1}^{m-\nu}\omega(f^{(m)}, h_{m+1})$$

$$(j=0, 1, \cdots, n-\nu).$$

［证］ 对 ν 施行归纳法. 首先,由命题 99 和 101,

$$|f[\bar{x}_j, \cdots, \bar{x}_{j+m+1}]|=\left|\frac{f[\bar{x}_{j+1}, \cdots, \bar{x}_{j+m+1}]-f[\bar{x}_j, \cdots, \bar{x}_{j+m}]}{\bar{x}_{j+m+1}-\bar{x}_j}\right|$$

$$=\frac{1}{m!(\bar{x}_{j+m+1}-\bar{x}_j)}|f^{(m)}(\xi_2)-f^{(m)}(\xi_1)|,$$

其中 $\xi_1, \xi_2\in[\bar{x}_j, \bar{x}_{j+m+1}]$, 从而 $|\xi_2-\xi_1|\leqslant\bar{x}_{j+m+1}-\bar{x}_j=\delta$, $\delta\geqslant h_{m+1}$. 故由命题 110,

$$|f[\bar{x}_j, \cdots, \bar{x}_{j+m+1}]|\leqslant\frac{\omega(f^{(m)};\delta)}{m!\delta}\leqslant2\frac{\omega(f^{(m)};h_{m+1})}{h_{m+1}}$$

$$(j=0, 1, \cdots, n-m-1).$$

这说明本命题中的不等式对 $\nu=m+1$ 成立.

设命题中的不等式对某个 ν 已成立, $m+1\leqslant\nu<n$. 则由

$$|f[\bar{x}_j, \cdots, \bar{x}_{j+\nu+1}]|\leqslant\frac{|f[\bar{x}_{j+1}, \cdots, \bar{x}_{j+\nu+1}]-f[\bar{x}_j, \cdots, \bar{x}_{j+\nu}]}{\bar{x}_{j+\nu+1}-\bar{x}_j}$$

和 $\bar{x}_{j+\nu+1}-\bar{x}_j\geqslant h_{m+1}$ 可知对 $\nu+1$ 亦成立. 证毕

112. 设 $0\leqslant k\leqslant m\leqslant n$, $f^{(m)}(x)$在$\langle x_0, \cdots, x_n\rangle$上连续, $h_{m+1}>0$. 则对 $x\in\langle x_0, \cdots, x_n\rangle$一致地有

$$R^{(k)}(x)=o\left(\frac{h^{n-k}}{h_{m+1}^{n-m}}\right) \quad (h\to 0),$$

确切地说,

$$|R^{(k)}(x)|\leqslant\frac{2^{n-m+1}n^k}{m!}\cdot\frac{h^{n-k}}{h_{m+1}^{n-m}}\omega(f^{(m)};h_{m+1})$$

$$(x\in\langle x_0, \cdots, x_n\rangle),$$

这里 h 是$\langle x_0, \cdots, x_n\rangle$的长度, h_{m+1} 是$\langle x_{i_0}, \cdots, x_{i_{m+1}}\rangle$的长度$(0\leqslant i_0<i_1<\cdots<i_{m+1}\leqslant n)$之最小者.

[证] 先证 $k<m\leqslant n$ 的情形. 把命题 102 的结果写成

$$R^{(k)}(x)=k!\sum_{\nu=0}^{k}f[x^{\nu+1}, \bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_{m-\nu-1}]\frac{\varpi_{m-\nu-1}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}$$

$$\cdot(x-\bar{x}_{m-\nu-1})-\sum_{\nu=m}^{n}f[\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_\nu]\varpi_\nu^{(k)}(x).$$

这是以 $m-1$ 代替 102 题中的m并对 $x_0, \cdots, x_n$ 的置换 $\bar{x}_0\leqslant\bar{x}_1\leqslant\cdots\leqslant\bar{x}_n$ 写出的, $\varpi_\nu(x)$就是对 $\bar{x}_i$ 而言的 $\omega_\nu(x)$. 显然, 节点的置换不会改变插值多项式, 因而也不会改变其余项 $R(x)$. 再应用命题 105, 有

$$R^{(k)}(x)=k!\sum_{\nu=0}^{k}\{f[x^{\nu+1}, \bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_{m-\nu-1}]-f[\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_m]\}$$

$$\cdot\frac{\varpi_{m-\nu-1}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-\bar{x}_{m-\nu-1})-\sum_{\nu=m+1}^{n}f[\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_\nu]\varpi_\nu^{(k)}(x)$$

$$=\Sigma_1-\Sigma_2.$$

估计 Σ_2. 由命题 107 的证明过程可知

$$|\varpi_\nu^{(k)}(x)|\leqslant\frac{d^k}{dh^k}h^\nu=\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)h^{\nu-k}=n^k h^{\nu-k}.$$

因此由命题 111,

$$|\Sigma_2| \leqslant \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{2^{\nu-m}}{m!} h_{m+1}^{m-\nu} \omega(f^{(m)}; h_{m+1}) n^k h^{\nu-k}$$

$$\leqslant \frac{n^k}{m!} \cdot \frac{h^{n-k}}{h_{m+1}^{n-m}} \omega(f^{(m)}; h_{m+1}) \sum_{\nu=m+1}^{n} 2^{\nu-m}$$

$$= (2^{n-m+1}-2) \frac{n^k}{m!} \cdot \frac{h^{n-k}}{h_{m+1}^{n-m}} \omega(f^{(m)}; h_{m+1}).$$

对 Σ_1, 类似地有

$$|\Sigma_1| \leqslant \frac{h^{m-k}}{(m-k)!} \omega(f^{(m)}; h).$$

由命题 109 又有

$$|\Sigma_1| \leqslant 2 \frac{h^{m-k+1}}{(m-k)!} \cdot \frac{\omega(f^{(m)}; h_{m+1})}{h_{m+1}}.$$

(h_{n+1} 看作 h.) 所以总起来说, 当 $x \in \langle x_0, \cdots, x_n \rangle$ 时

$$|R^{(k)}(x)| \leqslant |\Sigma_1| + |\Sigma_2| \leqslant \frac{2^{n-m+1} n^k}{m!} \cdot \frac{h^{n-k}}{h_{m+1}^{n-m}} \omega(f^{(m)}; h_{m+1}).$$

至于尚留下未证的 $m=k$ 的情形, 我们直接有

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - k! f[\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_k]$$

$$- \sum_{\nu=k+1}^{n} f[\bar{x}_0, \cdots, \bar{x}_\nu] \omega_\nu^{(k)}(x).$$

由是利用对 Σ_2 的估计立即给出所要证的结果.

[注意] 本题说明, 当被插函数具有 $m \leqslant n$ 阶连续导数时, 允许对含有 $m+1$ 重节点的节点组 (即 $h_m = 0$) 进行插值. 并且如果 $h/h_{m+1} \geqslant c > 0$, 则插值余项满足

$$\max_{x \in \langle x_0, \cdots, x_n \rangle} |R^{(k)}(x)| = o(h^{m-k}) \quad (0 \leqslant k \leqslant m).$$

又当被插函数具有 $n+1$ 阶连续导数时, 注意到 $\omega(f^{(n)}; t) = O(t)$, 由本命题也能给出

$$\max_{x \in \langle x_0, \cdots, x_n \rangle} |R^{(k)}(x)| = O(h^{n+1-k}) \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

现在的问题是, 此地的"大 O"能否改成"小 o"? 下面的命题113—

115 及 117 将给出其解答和具体例子.

113. 设 $0\leqslant m\leqslant k\leqslant n$. 则

$$\frac{R^{(k)}(x)}{k!}=\sum_{\nu=0}^{m-1}f[x^{\nu+1},x_0,\cdots,x_n]\frac{\omega_{n+1}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}$$

$$+\sum_{\nu=m}^{k}f[x^{\nu+1},x_0,\cdots,x_{n-\nu+m}]\frac{\omega_{n-\nu+m}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}(x-x_{n-\nu+m}).$$

[提示] 从命题 102 中 $m=n$ 时的等式出发, 仿照命题 102 的证法来证明.

114. 设 $0\leqslant k\leqslant n$, $f^{(n+k+1)}(t)$ 在 $\langle x,x_0,\cdots,x_n\rangle$ 上连续. 则存在 $\xi_\nu\in\langle x,x_0,\cdots,x_n\rangle(\nu=0,\cdots,k)$ 使

$$\frac{R^{(k)}(x)}{k!}=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{f^{(n+\nu+1)}(\xi_\nu)}{(n+\nu+1)!}\cdot\frac{\omega_{n+1}^{(k-\nu)}(x)}{(k-\nu)!}\qquad\text{(Steffensen)}$$

[证] 于命题 113 置 $m=k$ 并应用命题 101 即得.

115. 设 $x_i=x_0+ih\,(i=0,1,\cdots,n)$, $h>0$. 则分别存在 $\xi\in[x_0,x_n]$ 使

$$R''(x_i)=\begin{cases}(-1)^{n-i}2\dfrac{i!(n-i)!}{(n+1)!}\left(\displaystyle\sum_{\nu=1}^{i}\frac{1}{\nu}-\sum_{\nu=1}^{n-i}\frac{1}{\nu}\right)h^{n-1}f^{(n+1)}(\xi)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left(\text{若 } i\neq\dfrac{n}{2}\right),\\ (-1)^{i}2\dfrac{(i!)^2}{(n+2)!}h^nf^{(n+2)}(\xi)\qquad\left(\text{若 } i=\dfrac{n}{2}=\text{整数}\right).\end{cases}$$

[证] 先证 $i\neq\frac{n}{2}$ 的情形. 由于对称性, 不妨设 $i\leqslant\frac{n-1}{2}$. 这时, 于命题 113 取 $m=0$, $k=2$, 我们有

$$\frac{1}{2}\omega_n''(x)(x-x_n)\Big|_{x=x_i}$$

$$=(-1)^{n-i-1}i!(n-i)!h^{n-1}\sum_{\nu=i+1}^{n-i-1}\frac{1}{\nu},$$

$$\omega_{n-1}'(x)(x-x_{n-1})|_{x=x_i}=(-1)^{n-i-1}i!(n-i-1)!h^{n-1},$$

$$\omega_{n-2}(x)(x-x_{n-2})\big|_{x=x_i}=0.$$

以上三数皆同号,所以与命题 106 类似地即得所要证的等式.

对于$i=\frac{n}{2}$的情形，由于 $\omega''_{n+1}(x_i)=0$, 我们取 $m=1$. 这时由于

$$\omega_{n-1}(x)(x-x_{n-1})\big|_{x=x_i}=0.$$

所以立即可以得到所要证的等式.

［注意］ 命题 113 和 114 说明,若

$$\omega_{n+1}^{(k)}(x)\neq 0,$$

则 $R^{(k)}(x)=O(h^{n+1-k})$的阶一般说来就不能再改善了，不论f的光滑程度如何地好,除非正好

$$f[x^{\nu+1}, x_0, \cdots, x_n]=0.$$

因此,这时 $O(h^{n+1-k})$即是 $R^{(k)}(x)$的“饱和阶”. 至于在使

$$\omega_{n+1}^{(k)}(x)=0$$

的特殊点 x 处, $R^{(k)}(x)$的阶可达 $O(h^{n+2-k})$. 有的文献中,称这种 x 为超收敛点(此名称似乎不太妥贴). 我们不难看出，对于实变量的情形，$R^{(k)}(x)$的阶不能再比 $O(h^{n+2-k})$ 更高了——除去 $x_0, \cdots, x_n$ 中有多于 k 个节点与 x 重合这种显然平凡的情形.

116. 设 $f^{(n+1)}(x)$在$[a, a+nh]$上连续. 试证当 $0\leqslant k\leqslant n$时有下列马尔可夫(B. A. Марков)公式成立:

$$f^{(k)}(a)=\sum_{\nu=k}^{n}(-1)^{\nu-k}\frac{\Delta^{\nu}f(a)}{\nu!h^k}\left[\frac{d^k}{dt^k}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(t+\mu)\right]_{t=0}$$

$$+(-h)^{n+1-k}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\frac{d^k}{dt^k}\prod_{\mu=0}^{n}(t+\mu)\right]_{t=0},$$

式中 $\xi\in[a, a+nh]$, 而

$$\Delta^{\nu}f(a)=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\binom{\nu}{i}f(a+(\nu-i)h).$$

［提示］ 这是命题 106 的特例.

117. 设节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 关于 x 对称分布，而 $0 \leqslant k \leqslant n$. 则当 k 与 n 的奇偶性不相同时

$$R^{(k)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}^{(k)}(x),$$

当 k 与 n 的奇偶性相同时

$$R^{(k)}(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\omega_{n+1}^{(k-1)}(x),$$

这里假定出现的导数在 $\langle x_0, \cdots, x_n \rangle$ 上连续，而 $\xi \in \langle x_0, \cdots, x_n \rangle$.

(Бродский)

[提示] 利用命题 113 来证. 当 k 与 n 的奇偶性不同时取 $m=0$, 当 k 与 n 的奇偶性相同时取 $m=1$. 并且, 不妨设

$$x_{n-1} \leqslant x_{n-3} \leqslant x_{n-5} \leqslant \cdots \leqslant x_{n-4} \leqslant x_{n-2} \leqslant x_n.$$

则容易验证 $\omega_{n-\nu+m}^{(k-\nu)}(x)(x - x_{n-\nu+m})$ 当 $\nu = m, m+1, \cdots, k$ 时同号.

关于第四章的注释

注1. 从本章的例题 10, 11, 12, 13, 21, 22 可以看出: 利用阶的估计来判别收敛性的方法是特别方便的. 因此这里值得注意的一点是: 应该学会粗略地估计阶的能力, 也就是说应该学会对于收敛性问题的观察能力. 当然这种能力的培养是需要通过具体例子的演习才能见效的.

注2. 在 §2 中我们介绍了几个渐近式与切比晓夫质数定理的证法. 这些方法对于初学解析数论的人来说, 是特别值得学习的. 不难体会, 这些方法主要是表明了如何通过连续变量的形式(例如积分式与 $\ln x$ 等)来估计不连续变量(例如 $\sum_{2}^{n} a_k / \ln k, n!, \pi(x)$)的极限状态.

注3. 命题 47, 48, 50, 51 对函数类 Φ 该划了某些渐近估计成立的特征. 这些渐近估计的成立本是逼近论中的逆定理加之于逼

近度上的要求，但这几个命题在一般的解析计算中多少有一些用处．例如，利用它我们简化了弗兰西斯——立笃胡特(E. C. Francis; J. E. Littlewood, 1885—1977)渐近式(命题 53)的证明．

注4. 从 §3 中的命题 63 及其证法来看，可能会使人想到无穷大量的分布好象连续绕上的实数一般．其实这样的想法是并不正确的．事实上，根据阿达玛的定理(命题 68)，我们知道对于任意一对满足 $\phi_n \dashv \psi_p$ 条件的增叙列$\{\phi_n\}$与降叙列$\{\psi_p\}$来说，中间总可插入无穷多个新的无穷大．但是在实数连续统上，递增数列与递降数列有时却可能决定唯一的公共极限值．

注5. 关于无穷大强度的比较，如能培养一种明快的判断力，那是十分有益的．特别是关于 64 题、65 题及 68 题的证法，读者最好能通过绘图的方式，籍以获得一种正确的直观认识．

注6. 75、78 两题给出了指数函数和幂函数的有理公式渐近展开，即帕兑逼近．帕兑逼近往往是比泰勒展开更为有效的近似式，因而很有实用价值．例如，这里给出的关于幂函数的帕兑逼近，其中开头几个为电子计算机提供了开根运算的迭代函数．命题 74 的奥勃列希柯夫公式还可以为我们导出诸如 $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ 等函数的帕兑逼近．读者不妨一试．

注7. 命题 77 关于 e 的超越性是厄米特 (Ch. Hermite, 1822—1901)1873 年发现的．此后不久林特曼(F. Lindemann, 1852—1939)利用他的方法证明了 π 的超越性，从而解决了方圆不能(即不能用直尺与圆规作出与给定圆等面积的正方形) 这样一个几何难题．从这个例子我们可以见到，阶的估计是代数数论中的重要方法．这方面，最重要的结果即是解决希尔伯特第七问题所得出的结论：数 a^b 的超越性，这里 b 是任意的代数无理数，a 是$\neq 0, 1$的任意代数数．这个结论是盖立芳特(A. O. Гельфонд)1929年得到的，其所用的方法即是基于对复变函数 a^z 的插值余项的阶估计．

注8. 命题 80 是曼丢不等式的精确化. 第三章命题 7 中的不等式是曼丢在 1890 年猜测而由勃格于 1952 年证明的. 范德考朴(J.G. Van der Corput)和海弗林格(L. O. Heflinger)于 1956 年证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+c^2)^2}>\frac{1}{c^2}-\frac{5}{16c^4}.$$

这相当于命题 80 取 $k=1$ 的结果. 我们能得出这样一般的结果也是得力于欧拉-马克劳林公式.

注9. 命题 81 给出了欧拉-马克劳林公式的比较广泛的形式. 这种形式在解析数论中很有用处. 关于这方面的例子我们只举了圆内格点问题 (命题 86) 这一个例子. 这个例子的问题是数论中的著名问题之一. 怎样尽量改善余项的阶, 目前数论工作者仍在不断努力之中. 另一方面, 已知对任意正数 ε,

$$R(x)=\pi x+O(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon})$$

是不可能的.

注 10. 振荡积分的渐近展开公式有着强烈的实际应用背景. 在这方面, 国外学者的工作都没有得到这样一般和应用灵便的结果. 事实上, 他们研究的只是 $f(x,y)$ 为变量可分离这样一种较为简单的情形. 含大实参数 λ 的振荡积分的一般渐近展开公式(但不带封闭余项)是本书前一作者和周蕴时合作的研究成果, 见《应用数学学报》第 3 卷(1980), 第 204—209 页.

注11. 命题 81 给出的欧拉-马克劳林公式的那种形式是和下列形式等效的:

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{(\lambda-y)}f\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{1}{\nu!\lambda^{\nu}}\{\bar{B}_{\nu}(y-\lambda)f^{(\nu-1)}(1)-B_{\nu}(y)f^{(\nu-1)}(0)\}$$

$$-\frac{1}{r!\lambda^r}\int_0^1 \overline{B}_r(y-\lambda x)f^{(r)}(x)dx,$$

其中 $0\leqslant y\leqslant 1$，λ 是任意正数，$(\lambda-y)$表示小于 $\lambda-y$ 的最大整数. 正由于这个缘故，我们能运用命题 81 去简单地导出命题 82 带封闭余项的振荡积分渐近展开公式. 命题 81—85 是本书后一作者的工作.

注12. 差商和插值是非常重要的解析运算工具和技巧，切不可以为这只对数值工作者有用. 我们特别指出，尽管命题 96 关于差商显式表示的经典结果很优美，但命题 99 关于差商的递推法则仍是最为重要的. 从 102 题开始的一些重要命题的推导无不说明这一点. 可以说，学会它的灵活运用是掌握差商运算技巧的关键所在.

注13. 命题 102 以及由它推出的诸命题在数值分析和逼近论中有很重要的应用. 这些命题的结果比之康托洛维奇(Л. В. Канторович, 1912—)和克雷洛夫(В. И. Крылоь)在《高等分析的近似方法》中、普伦特(P. M. Prenter)在《样条函数和变分方法》中的结果有本质和彻底的改进. 而米凯拉德捷 (Ш. Е. Микеладзе) 在《数学分析的数值方法》中的结果则是错误的. 他认为只要

$$\omega_{n+1}^{(k)}(x)\neq 0,$$

就有

$$R^{(k)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}^{(k)}(x).$$

读者不难立刻看出其错误的缘由. 命题 102, 112, 113, 115 是本书后一作者的工作，其中命题 112 是与杨义群合作的成果. 稍后，命题 113 当 $m=0$ 时的特例也为特肯(T. Dokken)和李奇(T. Lyche)独立得到. 这些结果，都可看作斯帝芬孙 (J. F. Steffensen, 1873—1961) 公式即命题 114 的逐步发展.

中外人名译法对照

(带 * 号的是华人，其英文名系本人原定.)

阿贝耳	Abel, N. H.
狄里克雷	Dirichlet, G. L.
欧拉	Euler, L.
莱布尼茨	Leibniz, G. W.
泊松	Poisson, D.
鲍纳	Bonnet, O.
黎曼	Riemann, B.
斯提捷	Stieltjes, T. J.
勒贝格	Lebesgue, H.
傅里叶	Fourier, Ch.
约当	Jordan, C.
克罗内克	Kronecker, L.
墨吞斯	Mertens, F.
斯托尔茨	Stolz, O.
拉普拉斯	Laplace, P. S.
陶伯立茨	Toeplitz, O.
*陈建功	Chen, K. K.
那汤松	Натонсон, И. П.
麦克蒙	Mac-Mahon, P. A.
伯努利	Bernoulli, Jac.
马克劳林	Maclaurin, C.
丢番图	Diophantus
斐波那契	Fibonacci, L.
牛顿	Newton, I.
格雷戈里	Gregory, J.
泰勒	Taylor, B.

洛尔	Rolle, M.
拉贝	Raabe, J. L.
鲍利亚	Pólya, G.
薛戈	Szegö, G.
奥斯特洛格拉茨基	Остроградский, М. В.
高斯	Gauss, C. F.
切比晓夫	Чебышев, П. Л.
*崔锦泰	Chui, C. K.
雅可比	Jacobi, K.
柯西	Cauchy, A. L.
罗杰尔	Roger, L. J.
腊曼奴扬	Ramanujan, S.
哈代	Hardy, G. H.
伯恩斯坦	Бернштейи, С. Н.
鲍耳	Bohr
莫托尔纳伊	Моторный, В. Л.
埃特金松	Atkinson, F. V.
许玛克	Schumaker, L. L.
许尔	Schur, I.
赫尔特	Hölder, O.
琴生	Jensen, J. L. W. V.
曼丢	Mathieu, E.
勃格	Berg, L.
*樊𤅢	Fan, K.
利雅普诺夫	Ляпунов, А. М.
闵科夫斯基	Minkowski, H.
布涅可夫斯基	Buniakowski, V. J.
阿达玛	Hadamard, J.
扬	Young, W. H.
拉格朗日	Lagrange, J. L.
欧几里得	Euclid
希尔伯特	Hilbert, D.

卡尔曼	Carleman, T.
*林同坡	Lin, T. -P.
卡拉马答	Karamata, J.
利普希兹	Lipschitz, R.
杜布窪-雷茫	Du Bois-Reymond, P.
彭加莱	Poincaré, H.
华利斯	Wallis, J.
司特林	Stirling, J.
陶贝尔	Tauber, A.
萨比洛	Shapiro, H. S.
波雷耳	Borel, E.
达布	Darboux, G.
皮特	Petr, K.
奥勃莱希柯夫	Obreschkoff, N.
色品斯基	Sierpinski, W.
马尔可夫	Марков, В. А.
弗兰西斯	Francis, E. C.
立笃胡特	Littlewood, J. E.
帕兑	Padé, H.
厄米特	Hermite, Ch.
林特曼	Lindemann, F.
盖立芳特	Гельфонд, А. О.
范德考朴	Van der Corput, J. G.
海弗林格	Heflinger, L. O.
康托洛维奇	Канторович, Л. В.
克雷洛夫	Крылов, В. И.
普伦特	Prenter, P. M.
米凯拉德捷	Микеладзе, Ш. Е.
特肯	Dokken, T
李奇	Ly che, T
斯帝芬孙	Steffensen, J. F.

主要参考书

G. Pólya & G. Szegö:

《Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis》, 1925 年出版(有上海科学技术出版社出版的中译本《数学分析中的问题和定理》第一卷, 张奠宙、宋国栋等译).

T. J. l'A. Bromwich:

《Theory of Infinite Series》, 1926 年再版.

K. Knopp:

《Theory and Application of Infinite Series》, 1928 年出版.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood & G. Pólya:

《Inequalities》, 1952 年再版(有科学出版社出版的中译本《不等式》, 越民义译).

G. H. Hardy & E. M. Wright:

《Introduction to the Theory of Numbers》, 1945 年出版.

G. H. Hardy:

《The Orders of Infinity》, 1910 年出版.

E. C. Francis & J. E. Littlewood:

《Examples of Infinite Series》, 1949 年再版.

L. Comtet:

《Analyse Combinatoire》, 1970 年出版.

D. S. Mitrinović:

《Analytic Inequalities》, 1970 年出版.

G. Schmeißer & H. Schirmeier:

《Praktische Mathematik》, 1976 年出版.

L. L. Schumaker:

《Spline Functions: Basic Theory》, 1981 年出版.